

لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی مکانیک

برداشت انرژی از یک تیر دوگانه گیردار دارای رزونانس داخلی

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی

رضا اشتهاوردیها

استاد راهنما
دکتر رضا تیکنی



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی آقای رضا اشتهااردیها
تحت عنوان

برداشت انرژی از یک تیر دوگانه گیردار دارای رزونانس داخلی

در تاریخ ۱۳۹۹/۰۶/۱۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت:

دکتر رضا تیکنی	۱- استاد راهنمای پایان نامه
دکتر سعید ضیایی راد	۲- استاد مشاور پایان نامه
دکتر حسن نحوی	۳- استاد داور
دکتر علی لقمانی	۴- استاد داور
دکتر رضا تیکنی	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند، و شمارگران، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند؛ و سلام و درود بر حضرت محمد و خاندان پاک او، پیشوایان معصوم، آنان که وجودمان وامدار وجودشان است...

بر خود لازم می‌دانم

از پدر و مادر عزیزم، که همچون معلمانی بزرگوار، همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی‌همتا برایم بوده‌اند؛

از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر تیکنی و استاد مشاور ارجمندم، جناب آقای دکتر ضیایی‌راد که در کمال سعه صدر، حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و بدون راهنمایی‌ها و مساعدت‌های بی‌چشم‌داشت ایشان انجام این پروژه میسر نبود؛

همچنین از داوران ارجمندم جناب آقای دکتر نحوی و جناب آقای دکتر لقمانی که زحمت داوری این پایان‌نامه را کشیدند،

نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید...

کلیه حقوق مالکیت مادی و معنوی مربوط به این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان و پدیدآورندگان است. این حقوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان و بر اساس خط مشی مالکیت فکری این دانشگاه، ارزش گذاری و سهم بندی خواهد شد. هر گونه بهره برداری از محتوا، نتایج یا اقدام برای تجاری سازی دستاوردهای این پایان نامه تنها با مجوز کتبی دانشگاه صنعتی اصفهان امکان پذیر است.

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم که همیشه از من
حمایت کرده‌اند.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
هشت	فهرست مطالب
ده	فهرست شکل ها
سیزده	فهرست جدول ها
۱	چکیده
۲	فصل اول: پیش گفتار و مروری بر کارهای انجام شده
۲	۱-۱ مقدمه
۴	۲-۱ مواد پیزوالکتریک
۴	۳-۱ کاربرد مواد پیزوالکتریک
۶	۴-۱ مروری بر کارهای انجام شده و ضرورت انجام پژوهش
۷	۱-۴-۱ تحریک چند مودی
۸	۲-۴-۱ غیرخطی کردن
۱۱	۳-۴-۱ تبدیل فرکانس پایین به بالا
۱۷	۵-۱ موضوع پژوهش و هدف از انجام آن
۱۸	۶-۱ ساختار پایان نامه
۱۹	فصل دوم: مدل سازی تیر دوگانه گیردار دارای تشدید داخلی
۱۹	۱-۲ مدل سازی ریاضی
۲۱	۱-۱-۲ معادلات حاکم بر سیستم
۳۱	۲-۲ جمع بندی
۳۲	فصل سوم: روش مقیاس های زمانی چندگانه
۳۲	۱-۳ مقیاس های زمانی چندگانه
۳۵	۱-۱-۳ راه حل مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری ۱
۴۲	۲-۱-۳ راه حل مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری ۲
۴۹	۲-۳ جمع بندی
۵۰	فصل چهارم: معرفی ابزار تجربی پژوهش
۵۰	۱-۴ معرفی سیستم تجربی تیر دوگانه گیردار
۵۳	۲-۴ روند انجام آزمایش تجربی
۵۶	۳-۴ جمع بندی
۵۷	فصل پنجم: نتایج
۵۷	۱-۵ مدل اجزای محدود سیستم تیر دوگانه گیردار
۵۹	۲-۵ اثر چسب های دو طرفه بر کرنش محوری انتقالی از تیر بالا به وصله های پیزوالکتریک
۶۱	۳-۵ مقایسه بین فرکانس های طبیعی محاسبه شده و اندازه گیری شده در سیستم برداشت انرژی

۶۳	۴-۵ روش محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم
۶۴	۵-۵ نتایج تجربی
۶۴	۱-۵-۵ حالت عدم وجود آهنربا
۶۷	۲-۵-۵ صحت‌سنجی نتایج مدل‌سازی ریاضی در حالت عدم وجود آهنربا به وسیله نتایج تجربی
۷۲	۳-۵-۵ حالت وجود آهنربا
۷۹	۴-۵-۵ صحت‌سنجی نتایج مدل‌سازی ریاضی در حالت وجود آهنربا به وسیله نتایج تجربی
۸۷	۶-۵ مقایسه میان نتایج حل عددی مدل غیرخطی و مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲
۸۸	۷-۵ مقایسه میان حالت‌های وجود و عدم وجود آهنربا در برداشت انرژی
۹۳	۸-۵ جمع‌بندی

فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۹۵	۱-۶ مروری بر پژوهش انجام شده و نتایج آن
۹۸	۲-۶ پیشنهادها

پیوست‌ها

۹۹	پ-۱ روابط محاسبه بعضی از پارامترهای استفاده شده در فصل‌های قبل
۱۰۴	پ-۲ مشخصات وصله پیزوالکتریک و چسب دو طرفه

۱۰۶	مراجع
-----	-------

فهرست شکل ها

<u>صفحه</u>	<u>عنوان</u>
۳	شکل ۱-۱: استفاده از انرژی خورشیدی، باد و زمین گرمایی [۲، ۱].
۳	شکل ۲-۱: استفاده از مواد پیزوالکتریک برای برداشت انرژی [۳].
۴	شکل ۳-۱: جهت گیری دو قطبی های الکتریکی در ماده پیزوالکتریک [۵].
۵	شکل ۴-۱: برداشت انرژی از انرژی های محیط پیرامون به کمک مواد پیزوالکتریک و موارد کاربرد آن [۶].
۵	شکل ۵-۱: استفاده از خاصیت مستقیم مواد پیزوالکتریک در شتاب سنج ها [۷].
۶	شکل ۶-۱: استفاده از خاصیت معکوس مواد پیزوالکتریک در عملگرها [۸].
۷	شکل ۷-۱: سیستم پیزوالکتریک خطی ارائه شده توسط جیانگ [۹].
۷	شکل ۸-۱: کوچک بودن محدوده فرکانسی با بازده بالا در برداشت کننده های خطی.
۸	شکل ۹-۱: سیستم ارائه شده توسط دیهته و همکاران [۱۰].
۸	شکل ۱۰-۱: پاسخ فرکانسی به دست آمده برای سیستم دیهته بدون در نظر گرفتن جرم [۱۰].
۸	شکل ۱۱-۱: پاسخ فرکانسی به دست آمده برای سیستم دیهته با در نظر گرفتن جرم [۱۰].
۹	شکل ۱۲-۱: استفاده از مواد مرکب چندپایداره توسط پن و همکاران [۱۱].
۹	شکل ۱۳-۱: تاثیر اثر غیرخطی در پاسخ فرکانسی.
۱۰	شکل ۱۴-۱: استفاده از ایده تیر مون در برداشت انرژی توسط ارتورک و اینمن [۱۲].
۱۰	شکل ۱۵-۱: سیستم ارائه شده توسط ژانگ و همکاران [۱۳].
۱۰	شکل ۱۶-۱: سیستم ارائه شده توسط ژو و همکاران [۱۴].
۱۱	شکل ۱۷-۱: تبدیل فرکانس پایین به بالا توسط مکانیزم تماسی، ارائه شده توسط ژو و همکاران [۱۶].
۱۲	شکل ۱۸-۱: تبدیل فرکانس پایین به بالا توسط مکانیزم تماسی، ارائه شده توسط هلم و همکاران [۱۷].
۱۲	شکل ۱۹-۱: تبدیل فرکانس پایین به بالا توسط مکانیزم تماسی، ارائه شده توسط ژائو و همکاران [۱۸].
۱۳	شکل ۲۰-۱: پدیده پرش دو گانه در پاسخ فرکانسی توان تولیدی [۲۱].
۱۴	شکل ۲۱-۱: برداشت کننده انرژی همه جهته با استفاده از تشدید داخلی [۲۲].
۱۴	شکل ۲۲-۱: سیستم ارائه شده توسط ژیانگ و همکاران [۲۳].
۱۴	شکل ۲۳-۱: سیستم ارائه شده توسط یانگ و همکاران [۲۵].
۱۵	شکل ۲۴-۱: سیستم ارائه شده توسط فو و همکاران [۲۶].
۱۵	شکل ۲۵-۱: سیستم ارائه شده توسط ویو و همکاران [۱۵].
۱۶	شکل ۲۶-۱: پاسخ فرکانسی سیستم شکل ۲۵-۱ در حالت خطی [۱۵].
۱۶	شکل ۲۷-۱: پاسخ فرکانسی سیستم شکل ۲۵-۱ در حالت غیرخطی [۱۵].
۱۷	شکل ۲۸-۱: سیستم ارائه شده توسط چن و همکاران [۲۷].
۱۸	شکل ۲۹-۱: طرح اولیه سیستم پیشنهادی برای برداشت انرژی به وسیله وصله پیزوالکتریک.
۲۰	شکل ۱-۲: سیستم پیشنهاد شده برای برداشت انرژی در این پژوهش.
۲۵	شکل ۲-۲: جرم های انتهایی و فنر خطی در واقعیت و مدل سازی.
۵۱	شکل ۱-۴: وسیله آزمایشگاهی ساخته شده.
۵۱	شکل ۲-۴: شماتیک پایه سیستم طراحی شده.

- شکل ۴-۳: نمودار نیروی مغناطیسی اندازه‌گیری شده بر حسب فاصله میان دو آهنربا به همراه مقدار برازش شده آن. ۵۴
- شکل ۴-۴: نمای کلی سیستم اندازه‌گیری تجربی. ۵۴
- شکل ۵-۱: مدل‌سازی اجزای محدود انجام شده با توجه به شکل‌های ۲-۱، ۲-۲ و جدول‌های ۴-۱ و ۴-۲ تا پ-۱. ۵۸
- شکل ۵-۲: فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای به دست آمده از مدل اجزای محدود. ۵۹
- شکل ۵-۳: توزیع کرنش محوری در راستای مقطع عرضی میانی از تیر یک سرگیردار بالا. ۶۰
- شکل ۵-۴: مودهای فرضی در نظر گرفته شده برای تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا. ۶۱
- شکل ۵-۵: اثر شتاب پایه بر ولتاژ و توان موثر اندازه‌گیری شده در مود اول حالت عدم وجود آهنربا برای مقاومت‌های بی‌نهایت (حالت مدار باز) و ۱۷/۹۷ کیلو اهم. ۶۵
- شکل ۵-۶: اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان موثر اندازه‌گیری شده در مود اول حالت عدم وجود آهنربا در شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه. ۶۶
- شکل ۵-۷: اثر شتاب پایه و مقاومت الکتریکی بر ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا. ۶۶
- شکل ۵-۸: مقایسه میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی در ولتاژ موثر تولیدی برای مقاومت‌های الکتریکی متفاوت و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در مود اول حالت عدم وجود آهنربا. ۶۸
- شکل ۵-۹: مقایسه میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی در ولتاژ موثر تولیدی برای مقاومت‌های الکتریکی متفاوت و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در مود اول حالت عدم وجود آهنربا. ۶۹
- شکل ۵-۱۰: مقایسه میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی در ولتاژ موثر تولیدی و شرایط مختلف مقاومت الکتریکی و شتاب پایه در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا. ۷۰
- شکل ۵-۱۱: اثر فاصله اولیه میان دو آهنربا بر ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در حالت مدار باز و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه. ۷۳
- شکل ۵-۱۲: اثر فاصله اولیه میان دو آهنربا بر ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در حالت مدار باز و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه. ۷۳
- شکل ۵-۱۳: نمودار دامنه‌های ولتاژ اندازه‌گیری شده در فواصل اولیه مختلف آهنربا در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز. ۷۴
- شکل ۵-۱۴: اثر شتاب پایه بر ولتاژ اندازه‌گیری شده در فواصل اولیه آهنربا ۱/۹۷ و ۲/۹۳ سانتی‌متر در حالت مدار باز. ۷۵
- شکل ۵-۱۵: اثر فاصله اولیه آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ اندازه‌گیری شده در شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز. ۷۶
- شکل ۵-۱۶: اثر مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه. ۷۷
- شکل ۵-۱۷: اثر مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه. ۷۸
- شکل ۵-۱۸: اثر مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه. ۷۸
- شکل ۵-۱۹: اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر پهنای باند ولتاژ اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا. ۷۸
- شکل ۵-۲۰: مقایسه بین نتایج تجربی، راه‌حل عددی مدل غیرخطی، راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ در فواصل اولیه مختلف آهنربا در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز. ۸۰
- شکل ۵-۲۱: مقایسه بین نتایج تجربی، راه‌حل عددی مدل غیرخطی، راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ در فواصل اولیه مختلف آهنربا در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز. ۸۱

- شکل ۵-۲۲: مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در مقاومت های الکتریکی مختلف در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه. ۸۲
- شکل ۵-۲۳: مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در مقاومت های الکتریکی مختلف در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه. ۸۳
- شکل ۵-۲۴: مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در مقاومت های الکتریکی مختلف در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه. ۸۴
- شکل ۵-۲۵: اثر فاصله اولیه آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده، در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه. ۸۸
- شکل ۵-۲۶: اثر فاصله اولیه آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده، در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه. ۸۹
- شکل ۵-۲۷: اثر شتاب پایه بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در مقاومت الکتریکی بی نهایت (حالت مدار باز). ۹۰
- شکل ۵-۲۸: اثر شتاب پایه بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم. ۹۰
- شکل ۵-۲۹: اثر مقاومت الکتریکی بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه. ۹۱
- شکل ۵-۳۰: اثر مقاومت الکتریکی بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه. ۹۱
- شکل ۶-۱: سیستم پیشنهادی برای بررسی اثر پدیده دو پایداره و تشدید داخلی در برداشت انرژی. ۹۸

فهرست جدول‌ها

<u>صفحه</u>	<u>عنوان</u>
۵۳.....	جدول ۴-۱: مشخصات تیرهای پایین و بالا، جرم‌های انتهایی و فنر.
۵۶.....	جدول ۴-۲: فرکانس‌های طبیعی مدار باز و نسبت‌های میرایی اندازه‌گیری شده در حالت عدم وجود آهنربای دوم.
۶۲.....	جدول ۵-۱: خطای فرکانس‌های طبیعی اول و دوم میان داده‌های تجربی و نظری در حالت مدار باز و عدم وجود آهنربای دوم.
۷۱.....	جدول ۵-۲: درصد خطای قله ولتاژ میان نتایج عددی و تجربی در مود اول حالت عدم وجود آهنربا در شتاب‌های پایه ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه.
۷۱.....	جدول ۵-۳: درصد خطای قله ولتاژ میان نتایج عددی و تجربی در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا.
۷۲.....	جدول ۵-۴: فرکانس‌های طبیعی اول و دوم نظری سیستم تیر دوگانه گیردار در حالت وجود آهنربا به همراه پارامتر تنظیم‌کننده تشدید داخلی بر حسب فاصله اولیه مختلف آهنربا در حالت مدار باز.
۸۵.....	جدول ۵-۵: درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و حل عددی مدل غیرخطی در حالت مدار باز و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.
۸۵.....	جدول ۵-۶: درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و حل عددی مدل غیرخطی در حالت مدار باز و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.
۸۵.....	جدول ۵-۷: درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی مدل غیرخطی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.
۸۶.....	جدول ۵-۸: درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی مدل غیرخطی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.
۸۶.....	جدول ۵-۹: درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی مدل غیرخطی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.
۹۲.....	جدول ۵-۱۰: درصد تغییرات پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ در فواصل اولیه مختلف آهنربا نسبت به شرایط یکسان در حالت عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.
۹۲.....	جدول ۵-۱۱: درصد تغییرات پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ در فواصل اولیه مختلف آهنربا نسبت به شرایط یکسان در حالت عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.
۱۰۴.....	جدول پ-۱: مشخصات لایه چسب دو طرفه.
۱۰۵.....	جدول پ-۲: مشخصات زیر لایه‌های مختلف وصله پیزوالکتریک [۲۹] و [۱۲].

چکیده

یکی از روش‌های تولید انرژی الکتریکی، برداشت انرژی از ارتعاشات محیطی با استفاده از مواد پیزوالکتریک است که برای تامین انرژی تجهیزات الکترونیکی کم توان کارایی دارد. برداشت‌کننده‌های انرژی معمولاً رفتار خطی دارند و مشکل بسیاری از آن‌ها، کوچک بودن پهنای باند برداشت انرژی است. در این پژوهش از یک سیستم تیر دوگانه گیردار برای برداشت انرژی استفاده می‌شود که در انتها توسط یک فنر به یکدیگر متصل می‌شوند. وصله‌های پیزوالکتریک توسط چسب‌های دو طرفه بر روی سطوح پایین و بالای تیر بالا، نصب شده‌اند. از یک جفت آهنربا که یکی بر انتهای تیر پایین قرار گرفته و دیگری بر روی پایه سیستم نصب شده است، برای افزودن اثر غیرخطی به سیستم استفاده می‌شود. معادلات حاکم بر سیستم از روش انرژی و با فرض اویلر برنولی برای تیرهای دوگانه، توسط روش گسسته‌سازی مودهای فرضی استخراج می‌گردند. سیستم پیشنهادی به صورت یک سیستم دو درجه آزادی مدل شده و پارامترهای آن به گونه‌ای طراحی می‌شوند که در آن، تشدید داخلی رخ دهد. به دلیل اهمیت لایه چسب دوطرفه بین وصله‌های پیزوالکتریک و تیر بالا، در اتلاف بخشی از کرنش محوری منتقل شده از تیر بالا به وصله‌ها، اثر آن‌ها در مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته می‌شود. معادلات حرکت استخراج شده، توسط راه‌حل‌های عددی و مقیاس‌های زمانی چندگانه حل می‌گردند. در استفاده از راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه، علاوه بر مقیاس‌گذاری استفاده شده در سایر پژوهش‌ها، مقیاس‌گذاری جدیدی در این پژوهش معرفی می‌گردد که به وسیله آن، دقت حل افزایش می‌یابد. برای صحت‌سنجی نتایج نظری، از آزمایش تجربی استفاده می‌گردد که در دو حالت عدم وجود و وجود آهنربا انجام می‌شود. در حالت عدم وجود آهنربا، آهنربای نصب شده بر پایه سیستم حذف می‌گردد که در این حالت سیستم رفتار خطی از خود نشان می‌دهد. در حالت وجود آهنربا، علاوه بر غیرخطی بودن سیستم، در آن تشدید داخلی نیز رخ می‌دهد و باعث می‌شود که پاسخ فرکانسی سیستم در اطراف فرکانس طبیعی اول خود، دارای دو قله باشد. مقایسه میان نتایج نظری و تجربی نشان می‌دهد که مدل‌سازی ریاضی انجام شده، دقت بالایی در برابر نتایج تجربی دارد و به خوبی می‌تواند رفتار آن‌ها را پیش‌بینی کند. در این پژوهش، هدف بررسی اثر تشدید داخلی و غیرخطی شدن سیستم، در برداشت انرژی است. بدین منظور، پهنای باند برداشت انرژی و قله بیشینه ولتاژ در حالت وجود آهنربا نسبت به شرایط یکسان در حالت عدم وجود آهنربا، مقایسه می‌شوند. سیستم طراحی شده در حالت وجود آهنربا، این قابلیت را دارد که بسته به نیاز، پهنای باند یا قله بیشینه بزرگتری نسبت به حالت عدم وجود آهنربا داشته باشد. هم‌چنین، مزیت دیگر سیستم طراحی شده، برداشت انرژی در فرکانس‌های پایین و شتاب پایه‌های کوچک است.

کلمات کلیدی

برداشت انرژی، تیر دوگانه گیردار، ارتعاشات غیرخطی، تشدید داخلی، مودهای فرضی، روش مقیاس‌های زمانی چندگانه.

فصل اول

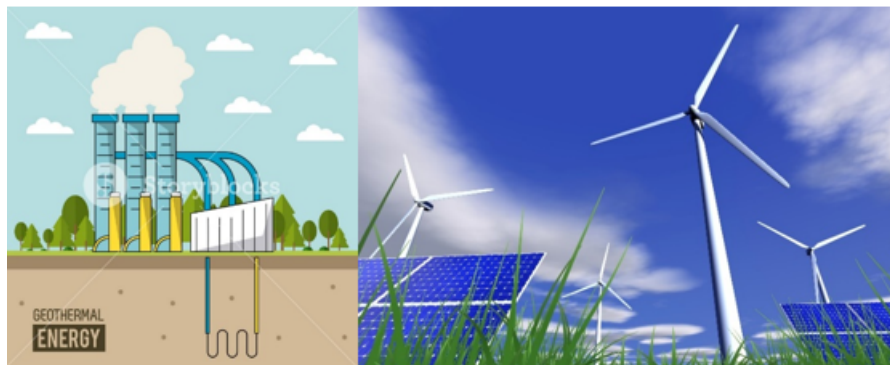
پیش‌گفتار و مروری بر کارهای انجام شده

در این فصل ابتدا به برداشت انرژی و انواع منابع انرژی پرداخته می‌شود. در ادامه ماده پیزوالکتریک معرفی شده و کاربردهای آن بررسی می‌گردد. سپس بر پژوهش‌های انجام شده در زمینه برداشت انرژی به وسیله مواد پیزوالکتریک مروری خواهد شد. در نهایت پژوهش حاضر معرفی شده و تفاوت آن با کارهای قبلی بررسی خواهد شد.

۱-۱ مقدمه

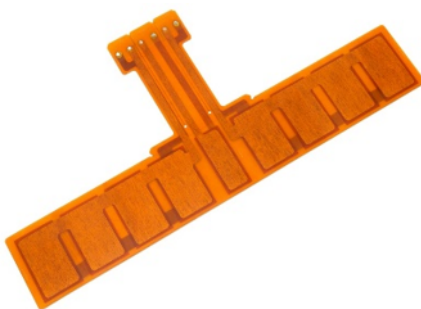
مسئله انرژی در طول تاریخ به دلیل تجدیدنناپذیر بودن اکثر منابع انرژی، یکی از دغدغه‌های اصلی انسان بوده و سعی شده است راهکارهایی ارائه شود که توسط آن بتوان انرژی هدر رفته را بازیابی و دوباره از آن استفاده کرد. برداشت انرژی از انرژی‌های محیط پیرامون، یکی از این راهکارها است که بسته به توان تولیدی به دو دسته‌ی زیر تقسیم‌بندی می‌شود:

۱. برداشت‌کننده‌های انرژی با توان بالا، همانند استفاده از انرژی خورشیدی، باد، زمین‌گرمایی، مغناطیسی و غیره. شکل ۱-۱ استفاده از خورشیدی، انرژی باد و زمین‌گرمایی را نشان می‌دهد که برای تولید برق در مقیاس‌های بزرگ به کار می‌رود.



شکل ۱-۱ - استفاده از انرژی خورشیدی، باد و زمین گرمایی [۱، ۲].

۲. برداشت کننده‌های انرژی با توان پایین، همانند استفاده از انرژی مکانیکی به وسیله مواد پیزوالکتریک^۱، فلکسوالکتریک^۲، تریبوالکتریک^۳ و غیره. شکل ۱-۲ یک وصله پیزوالکتریک را نشان می‌دهد که برای برداشت انرژی در مقیاس‌های میکرو^۴ و نانو^۵ به کار می‌رود.



شکل ۱-۲ - استفاده از مواد پیزوالکتریک برای برداشت انرژی [۳].

برای برداشت انرژی با توان بالا، استفاده از انرژی خورشیدی، صرفه اقتصادی بیشتری دارد ولی این روش به نور مستقیم خورشید نیاز دارد که خود مشکل بزرگی است. برداشت کننده‌های انرژی با توان پایین همانند مواد پیزوالکتریک، این امکان را فراهم آورده است که بدون نیاز به نور خورشید یا انرژی زمین گرمایی، توان الکتریکی دریافت نمود. به عنوان مثال برای سلامت‌سنجی پل‌ها، نیاز به سنسورهای بی‌سیم سلامت‌سنج می‌باشد تا وضعیت پل را به صورت لحظه‌ای به مرکز کنترل گزارش نماید. عبور وسایل نقلیه از پل‌ها باعث ارتعاش و در نتیجه ایجاد کرنش در آن‌ها می‌شود. با نصب مواد پیزوالکتریک در محل‌هایی که کرنش پل بیشینه است، می‌توان انرژی مورد نیاز سنسورهای بی‌سیم سلامت‌سنج را از آن‌ها تامین کرد.

موضوع پژوهش حاضر متمرکز بر برداشت انرژی با توان پایین به کمک مواد پیزوالکتریک است. از این رو در

¹Piezoelectric

²Flexoelectric

³Triboelectric

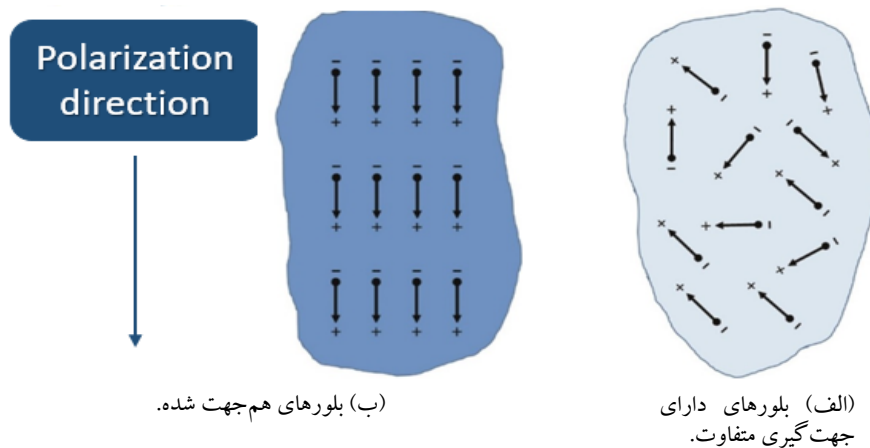
⁴Micro

⁵Nano

ادامه به معرفی این مواد پرداخته می شود.

۲-۱ مواد پیزوالکتریک

ماده پیزوالکتریک در سال ۱۸۸۰ توسط پیر کوری کشف شد. این مواد دارای ساختار کریستالی هستند که از بلورهای مختلفی تشکیل شده اند. هریک از این بلورها دارای جهت گیری دو قطبی الکتریکی متفاوتی در ساختار ماده هستند (شکل ۱-۳-الف). دمایی به نام دمای کوری^۱ وجود دارد که در این دما، جهت گیری دو قطبی های الکتریکی می تواند تغییر کند. نحوه ساخت این مواد به این صورت است که ماده تا نزدیکی دمای کوری گرم شده و یک میدان الکتریکی بسیار قوی به مقدار $\frac{1\text{Kvoltage}}{\text{mm}}$ به آن اعمال می شود. این امر باعث می شود که بیشتر دو قطبی های الکتریکی درون ماده با این میدان خارجی هم جهت شوند، سپس در این حالت ماده را سرد می کنند. این کار باعث می شود تا دو قطبی ها در ماده هم جهت بمانند که به آن جهت قطبش^۲ گفته می شود و ماده در این حالت خاصیت پیزوالکتریک پیدا می کند (شکل ۱-۳-ب) [۴].



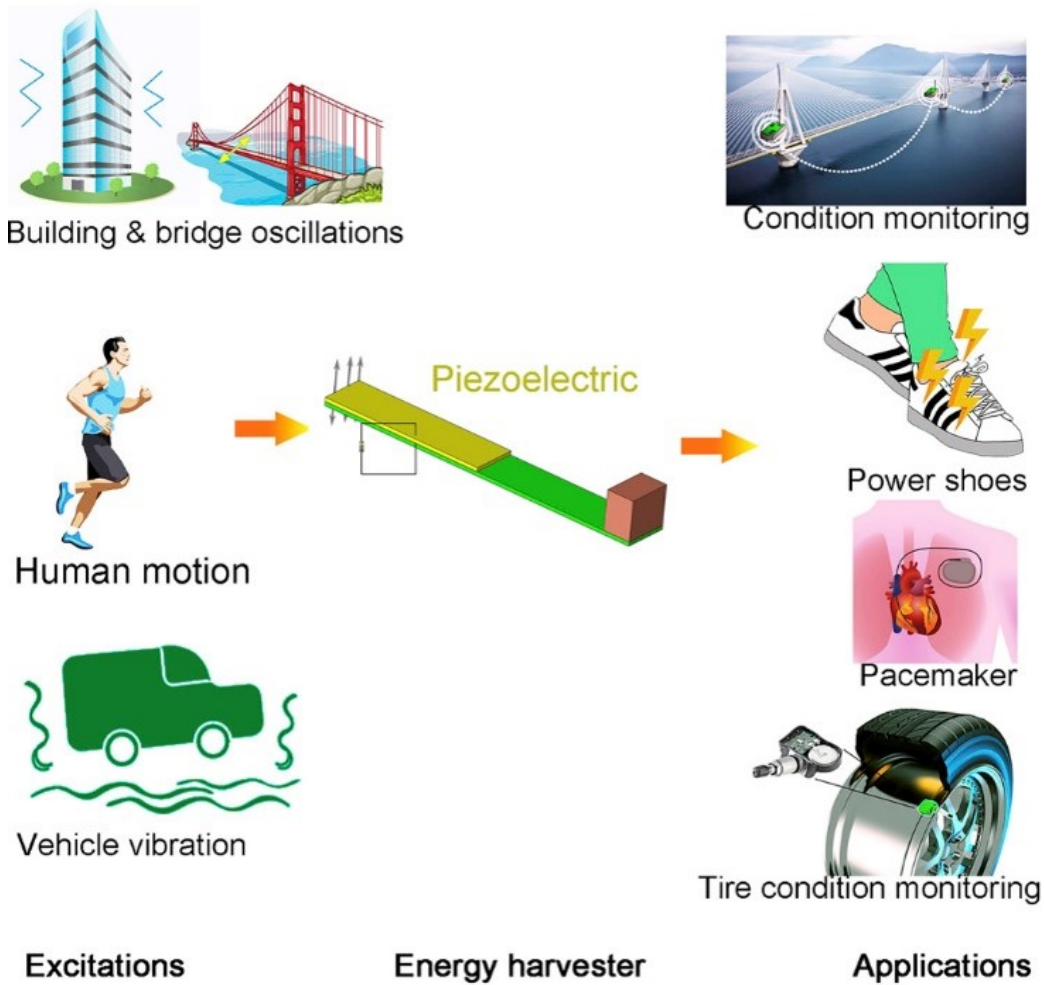
شکل ۱-۳- جهت گیری دو قطبی های الکتریکی در ماده پیزوالکتریک [۵].

۳-۱ کاربرد مواد پیزوالکتریک

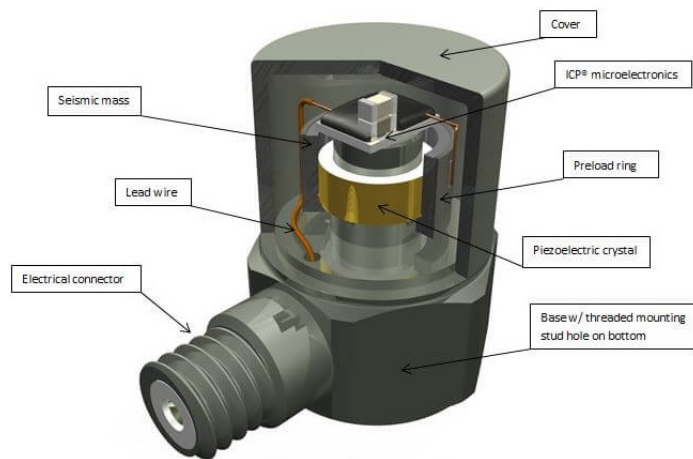
مواد پیزوالکتریک با توجه به خاصیت مستقیم و معکوس آن کاربرد متفاوتی دارند. در خاصیت مستقیم کرنش مکانیکی به انرژی الکتریکی تبدیل می شود. از خاصیت مستقیم در برداشت انرژی و ساخت سنسورها استفاده می شود. شکل ۱-۴ برداشت انرژی از انرژی های محیط پیرامون به وسیله مواد پیزوالکتریک را نشان می دهد [۶]. شکل ۱-۵ نحوه استفاده از مواد پیزوالکتریک در ساخت شتاب سنج ها را به تصویر کشیده است.

¹Curie temperature

²Polarization direction



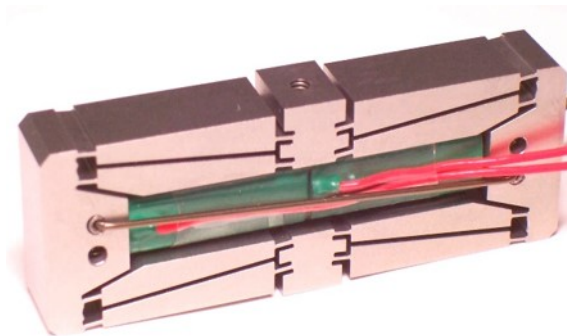
شکل ۴-۱- برداشت انرژی از انرژی‌های محیط پیرامون به کمک مواد پیزوالکتریک و موارد کاربرد آن [۶].



شکل ۵-۱- استفاده از خاصیت مستقیم مواد پیزوالکتریک در شتاب‌سنج‌ها [۷].

در خاصیت معکوس پیزوالکتریک انرژی الکتریکی به کرنش مکانیکی تبدیل می‌شود. از خاصیت معکوس پیزوالکتریک

در ساخت عملگرها^۱ استفاده می‌شود که کاربردهای کنترلی دارد و نمونه‌ای از آن در شکل ۶-۱ آورده شده است.



شکل ۶-۱- استفاده از خاصیت معکوس مواد پیزوالکتریک در عملگرها [۸].

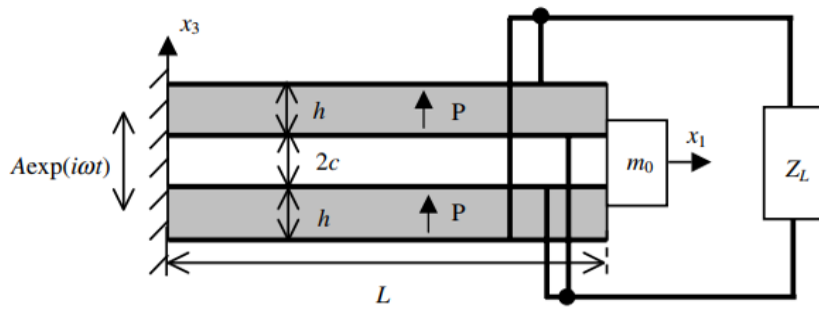
در این پژوهش، هدف برداشت انرژی از انرژی مکانیکی (ارتعاشی) به وسیله مواد پیزوالکتریک است. مشکل سیستم‌های برداشت انرژی پیزوالکتریک در حالت خطی، این است که فقط در بازه فرکانسی اطراف فرکانس طبیعی‌شان، بیشترین بازدهی را دارند که بازه محدودی است. یکی از راه‌های افزایش پهنای باند فرکانسی در سیستم‌ها، ایجاد تشدید داخلی^۲ به همراه غیرخطی کردن است. تشدید داخلی در سیستم‌های چند درجه آزادی غیرخطی رخ می‌دهد که در آن‌ها فرکانس طبیعی متناظر با یکی از مودهای سیستم، مضرب صحیحی از یکی دیگر از فرکانس طبیعی سایر مودها است. این پدیده در سیستم‌های پیوسته نیز وجود دارد. بنابراین در این پژوهش سعی می‌گردد با استفاده از سیستمی که تشدید داخلی در آن رخ می‌دهد، برداشت انرژی را در محدوده وسیع تری از فرکانس انجام داد.

۴-۱ مروری بر کارهای انجام شده و ضرورت انجام پژوهش

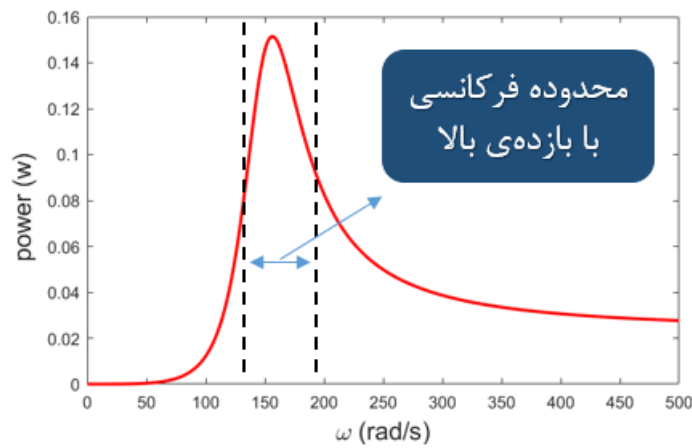
استفاده از انرژی‌هایی که بدون مصرف در طبیعت به هدر می‌روند، از دغدغه‌های بشر در چند دهه اخیر بوده است. برداشت انرژی فرآیندی است که به وسیله آن انرژی مورد نیاز وسایل الکترونیکی از انرژی‌های موجود در محیط پیرامون، همانند انرژی خورشیدی، ارتعاشی، آکوستیکی، باد و غیره تامین می‌شود. یکی از راه‌های تبدیل انرژی ارتعاشی به انرژی الکتریک، استفاده از مواد پیزوالکتریک است. سیستم‌های اولیه برداشت انرژی به کمک مواد پیزوالکتریک، به صورت تیر یک سرگیردار به همراه لایه‌های پوشاننده پیزوالکتریک بودند که رفتار خطی از خود نشان می‌دادند و یکی از اولین آن‌ها، توسط جیانگ و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۵ ارائه شد (شکل ۷-۱). سیستم برداشت انرژی نشان داده شده در شکل ۷-۱ از سه لایه تشکیل شده است که لایه وسط از ماده فلزی و لایه‌های بالا و پایین از مواد پیزوالکتریک تشکیل شده‌اند. این سیستم‌ها به دلیل خطی بودن، فقط در بازه محدود فرکانسی اطراف فرکانس طبیعی‌شان، بازده مطلوبی دارند (شکل ۸-۱).

^۱Actuator

^۲Internal resonance



شکل ۷-۱- سیستم پیزوالکتریک خطی ارائه شده توسط جیانگ [۹].



شکل ۸-۱- کوچک بودن محدوده فرکانسی با بازده بالا در برداشت کننده‌های خطی.

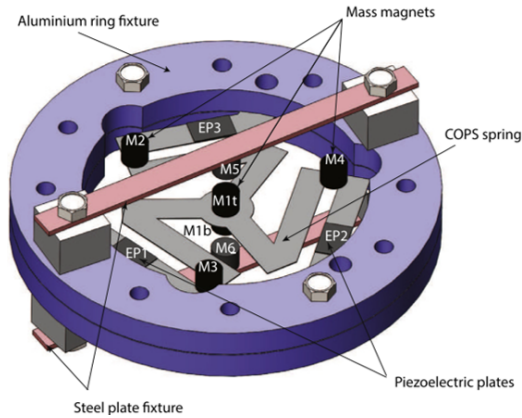
در ادامه دو روش تحریک چند مودی^۱ و غیرخطی کردن برای رفع مشکل کوچک بودن محدوده فرکانسی پاسخ در سیستم‌های خطی، ارائه شده است.

۱-۴-۱ تحریک چند مودی

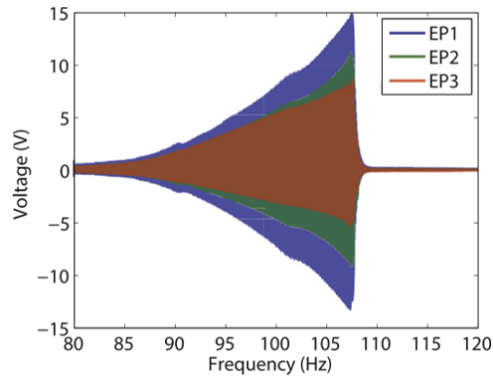
در این روش که فقط برای سیستم‌های چند درجه آزادی به کار می‌رود، سعی می‌شود که چند مود اول سیستم به یکدیگر نزدیک شده و در یک بازه فرکانسی کوچک، همه مودها تحریک شوند. برای نمونه، دیپته و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۸، مطابق شکل ۹-۱ یک سیستم برداشت انرژی ارائه دادند. در این سیستم سه لایه پیزوالکتریک قرار داده شده و تعدادی جرم با خاصیت مغناطیسی هم برای تنظیم فرکانس‌های طبیعی سیستم به کار برده شده است. دیپته در ابتدا بدون وجود جرم پاسخ فرکانسی را رسم کرد. همان‌طور که در شکل ۱۰-۱ مشاهده می‌شود، در حالت بدون وجود جرم، در محدوده فرکانسی زیر ۱۲۰ هرتز، فقط یک مود ارتعاشی تحریک شده است که فقط در اطراف فرکانس ۱۰۸ هرتز دارای بازده بالایی است. با قرار دادن جرم‌ها و تنظیم مقدار آن‌ها، تعداد مودهایی که زیر ۱۲۰ هرتز تحریک می‌شوند به ۳ مود می‌رسد که در شکل ۱۱-۱ ارائه شده است. با این کار محدوده فرکانسی پاسخ افزایش یافته و بازده

^۱Multimodal

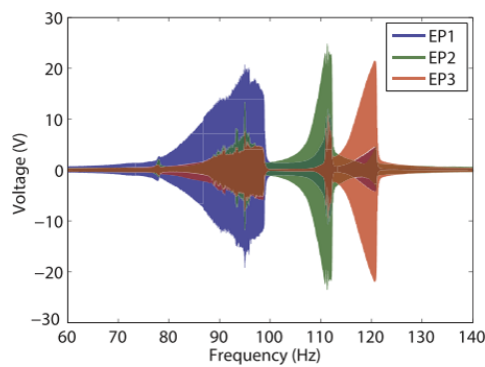
انرژی برداشت شده نیز بیشتر می شود [۱۰].



شکل ۹-۱- سیستم ارائه شده توسط دیهته و همکاران [۱۰].



شکل ۱۰-۱- پاسخ فرکانسی به دست آمده برای سیستم دیهته بدون در نظر گرفتن جرم [۱۰].

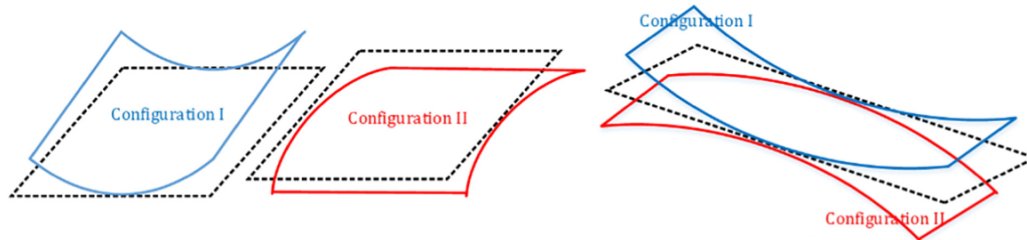


شکل ۱۱-۱- پاسخ فرکانسی به دست آمده برای سیستم دیهته با در نظر گرفتن جرم [۱۰].

۲-۴-۱ غیرخطی کردن

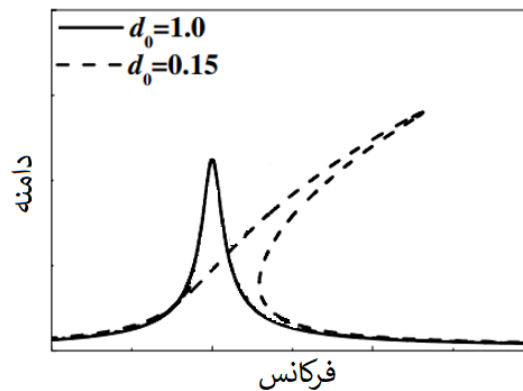
غیرخطی کردن نیز یکی دیگر از راه‌های رفع مشکل کوچک بودن محدوده فرکانسی پاسخ است. با غیرخطی شدن سیستم‌ها، محدوده فرکانسی پاسخ وسیع‌تر می‌شود. با غیرخطی بودن یکی از ضرایب سختی، میرایی (استهلاک)،

اینرسی سیستم و نیروی خارجی، سیستم غیرخطی می‌شود. بعضی سیستم‌ها ذاتاً غیرخطی هستند که نمونه‌ای از آن‌ها مواد مرکب چند پایداره^۱ است. همان‌طور که در شکل ۱-۱۲ مشاهده می‌شود، این مواد دارای چند حالت پایدار هستند. پن و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۸ برداشت انرژی از مواد مرکب چند پایداره را بررسی نمودند.



شکل ۱-۱۲ - استفاده از مواد مرکب چند پایداره توسط پن و همکاران [۱۱].

برای موادی که ذاتاً غیرخطی نیستند، اثر غیرخطی عمداً به آن‌ها اضافه شده تا این سیستم‌ها هم بتوانند از خواص اثر غیرخطی بهره‌مند شوند. این کار می‌تواند با اضافه کردن آهنربا به سیستم انجام شود که در آن صورت یک نیروی غیرخطی به سیستم اضافه خواهد کرد. همان‌طور که در شکل ۱-۱۳ مشاهده می‌شود، غیرخطی شدن باعث خم شدن پاسخ فرکانسی به یک سمت شده^۲ و باعث می‌شود محدوده فرکانسی پاسخ وسیع‌تر گردد.



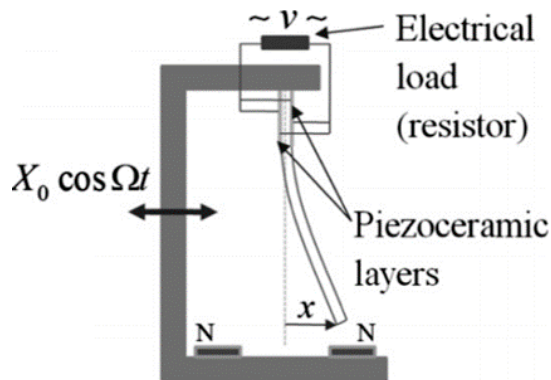
شکل ۱-۱۳ - تاثیر اثر غیرخطی در پاسخ فرکانسی.

ارتورک و اینمن [۱۲] نخستین بار از ایده تیر مون^۳ در سال ۲۰۰۹ استفاده کرده و با استفاده از اثر غیرخطی آهنربا، بازده برداشت انرژی را افزایش دادند (شکل ۱-۱۴). ژانگ و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۴، مطابق شکل ۱-۱۵ یک آهنربا به انتهای تیر یک سرگیردار اضافه کردند و پاسخ ارتعاشی آن را بررسی نمودند. ژو و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۷ با استفاده از چند آهنربا سیستم خود را سه پایداره کردند (شکل ۱-۱۶) و اثر آن را بر توان تولیدی در وصله پیزوالکتریک بررسی نمودند.

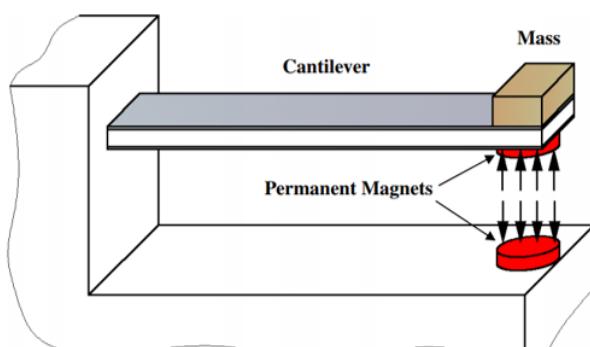
¹Multistable composite

²Backbone curve

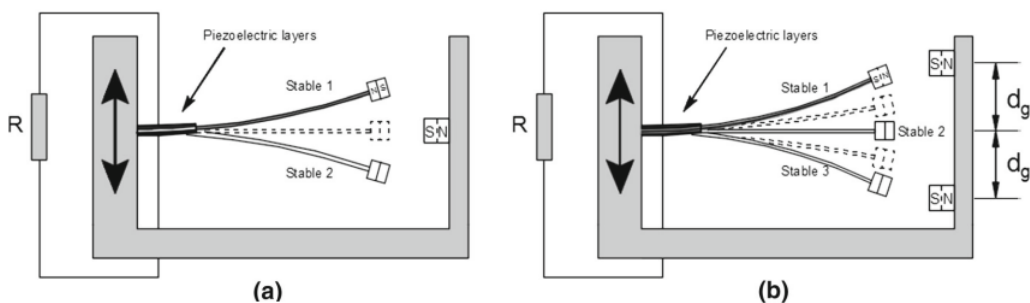
³Moon's beam



شکل ۱-۱۴ - استفاده از ایده تیر مون در برداشت انرژی توسط ارتورک و اینمن [۱۲].



شکل ۱-۱۵ - سیستم ارائه شده توسط ژانگ و همکاران [۱۳].



شکل ۱-۱۶ - سیستم ارائه شده توسط ژو و همکاران [۱۴].

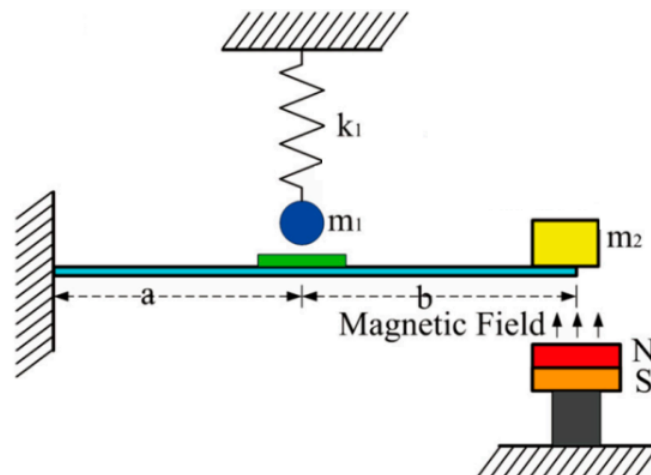
بیشتر امواج ارتعاشی که در محیط پیرامون ایجاد می‌شوند (فرکانس تحریک)، دارای فرکانس پایین هستند. همانند انرژی امواج آب (> 1 هرتز)، حرکت انسان ($= 1$ هرتز)، ارتعاش خودروها (> 20 هرتز) و غیره. پس بیشترین مقدار فرکانس در امواج فرکانسی فرکانس پایین، حدود ۲۰ هرتز است. بنابراین یکی دیگر از مشکلات سیستم‌های برداشت انرژی پیزوالکتریک، پایین بودن فرکانس ورودی (فرکانس تحریک) است. یکی از راه‌های رفع این مشکل، استفاده از روش تبدیل فرکانس پایین به بالا می‌باشد [۱۵].

۳-۴-۱ تبدیل فرکانس پایین به بالا

در این روش مشکل بین پایین بودن فرکانس تحریک و بالا بودن فرکانس طبیعی سیستم برداشت کننده انرژی حل می‌شود. تبدیل فرکانس پایین به بالا به دو روش مکانیزم با تماس (تماسی) و غیر تماسی انجام می‌شود.

الف - مکانیزم تماسی (ضربه)

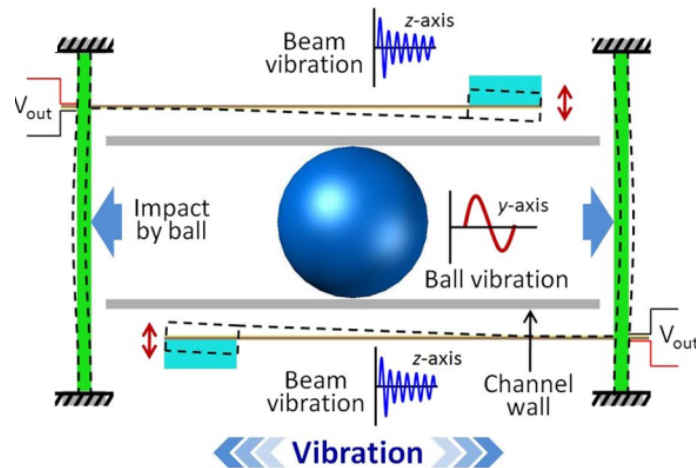
در روش مکانیزم تماسی، با ایجاد ضربه به سیستم برداشت کننده انرژی، فرکانس پایین ورودی به فرکانس بالا تبدیل می‌شود. ضربه می‌تواند همه فرکانس‌ها در سیستم از جمله فرکانس‌های بالا را تحریک کند. ژو و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۷، مطابق شکل ۱-۱۷ مکانیزمی را ارائه دادند که در این مکانیزم، فرکانس پایین تحریک ابتدا به سیستم اصلی که تیر است، وارد می‌شود. در راستای ارتعاش این تیر، یک سیستم جرم و فنر قرار می‌دهند. این امر باعث می‌شود با هر ارتعاش تیر، ضربه‌ای از سیستم جرم و فنر به آن وارد شده و فرکانس پایین تحریک به فرکانس بالا تبدیل شود. البته در این روش ممکن است وصله پیزوالکتریک آسیب ببیند.



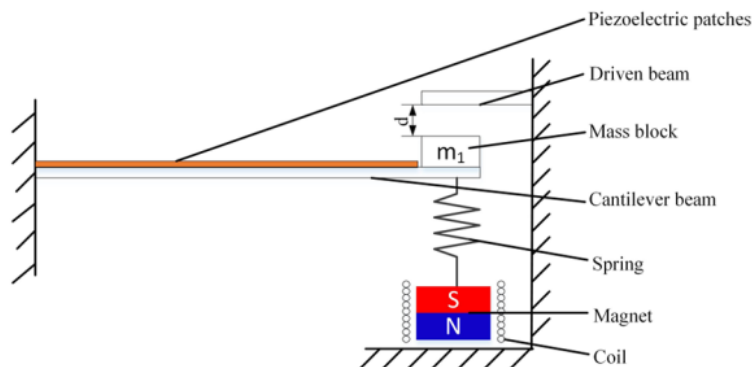
شکل ۱-۱۷ - تبدیل فرکانس پایین به بالا توسط مکانیزم تماسی، ارائه شده توسط ژو و همکاران [۱۶].

هلیم و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۸، مکانیزمی را پیشنهاد دادند که در آن فرکانس پایین حاصل از حرکت انگشتان دست انسان به وسیله ضربه‌ای که یک توپ به پایه تیرهای یک سرگیردار وارد می‌کند، به فرکانس بالا تبدیل می‌شود (شکل ۱-۱۸). ژائو و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۸، مکانیزمی را پیشنهاد دادند که با قرار دادن یک مانع در جهت ارتعاش سیستم، سیستم به صورت تکه‌ای خطی^۱ تبدیل می‌شود. آن‌ها اثر وجود یا عدم وجود مانع بر پاسخ فرکانسی را بررسی نمودند (شکل ۱-۱۹).

^۱Piecewise-linear



شکل ۱۸-۱ - تبدیل فرکانس پایین به بالا توسط مکانیزم تماسی، ارائه شده توسط هلیم و همکاران [۱۷].



شکل ۱۹-۱ - تبدیل فرکانس پایین به بالا توسط مکانیزم تماسی، ارائه شده توسط ژائو و همکاران [۱۸].

ب- مکانیزم غیر تماسی (تشدید داخلی)

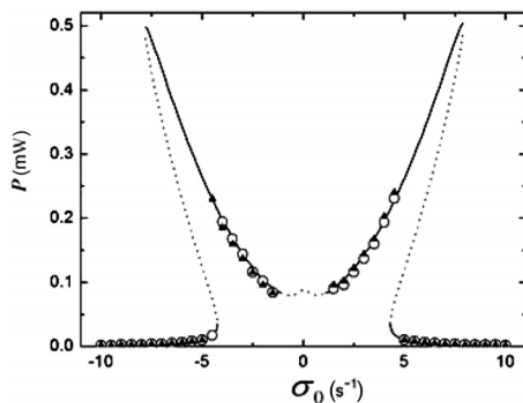
در روش مکانیزم غیر تماسی، از تشدید داخلی استفاده می‌شود. برای ایجاد تشدید داخلی دو شرط چند درجه آزادی و غیرخطی بودن سیستم الزامی است. سیستم باید دارای چند درجه آزادی باشد تا امکان آن که فرکانس یکی از مودهای سیستم مضرب صحیحی از سایر مودها باشد، وجود داشته باشد. هم‌چنین سیستم باید غیرخطی باشد تا پاسخ اجزای مختلف سیستم به تحریک ورودی متفاوت شود. هنگامی که تشدید داخلی در سیستم رخ می‌دهد، انرژی بین مودهای سیستم جابه‌جا می‌شود و آن مودها هم‌زمان با یکدیگر تحریک می‌گردند. تشدید داخلی اولین بار در کشتی‌ها مشاهده شد. کشتی‌های در حال حرکت بر روی آب به دلیل عبور از روی امواج، دارای حرکت گام^۱ هستند که حرکت حول محور عرضی کشتی است. حرکت دیگری که کشتی‌ها می‌توانند داشته باشند، حرکت گردش^۲ است که حرکت حول محور طولی آن است. حرکت گردشی یک حرکت ناخواسته در کشتی است که می‌تواند باعث غرق شدن آن شود. در زمان‌های قدیم در بعضی از مواقع مشاهده می‌شد که کشتی دارای حرکت گام بر روی آب، به طور ناگهانی

^۱Pitch motion

^۲Roll motion

دارای حرکت گردشی نیز می‌شد. این امر ممکن بود باعث غرق شدن کشتی شود. فرود و همکاران [۱۹] در سال ۱۸۶۳، با بررسی‌هایی که انجام دادند، فهمیدند که اگر فرکانس طبیعی حرکت گام دو برابر فرکانس طبیعی حرکت گردشی باشد، حرکت ناخواسته گردشی در کشتی ایجاد می‌شود. اثبات این نسبت بین فرکانس‌های طبیعی، از معادلات حرکت خطی که در آن زمان برای کشتی‌ها در نظر گرفته شده بود، قابل استخراج نبود. سرانجام با پژوهش‌هایی که در این زمینه انجام شد، نایفه و همکاران [۲۰] در سال ۱۹۷۳، با ارائه معادلات غیرخطی برای کشتی، نسبت ۲ به ۱ در فرکانس‌های طبیعی حرکت گام به گردش که عامل ایجاد حرکت گردشی است، را اثبات کردند. هم‌چنین دریافتند که اگر فرکانس امواج آب نزدیک فرکانس حرکت گام باشد و دامنه امواج از حدی بزرگتر شود، دامنه حرکت گام کشتی نسبت به دامنه امواج آب ثابت شده و تغییری نمی‌کند که پدیده اشباع^۱ نام دارد. بنابراین انرژی اضافه‌ای که پس از ایجاد پدیده اشباع، از طریق امواج آب به کشتی منتقل می‌شود، در حرکت گردشی ظاهر شده و سبب غرق شدن کشتی‌ها می‌شود. این تغییر انرژی بین مودهای سیستم به دلیل پدیده تشدید داخلی اتفاق می‌افتد.

چن و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۱۵، اثر تشدید داخلی بر پاسخ فرکانسی سیستم برداشت‌کننده انرژی را بررسی نمودند. تشدید داخلی به همراه اثر غیرخطی، علاوه بر توانایی تبدیل فرکانس پایین به بالا، باعث وسیع‌تر شدن محدوده فرکانسی پاسخ از طریق ایجاد پدیده پرش دو گانه^۲ می‌شود. این پدیده که در حالت نزدیک به تشدید داخلی نیز رخ می‌دهد، باعث خم شدن پاسخ فرکانسی به هر دو سمت کاهش و افزایش فرکانس می‌شود (شکل ۱-۲۰).

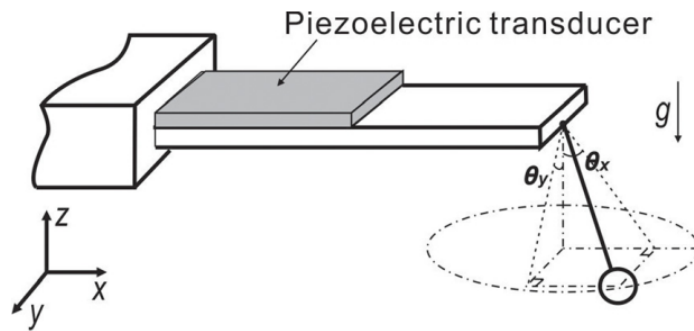


شکل ۱-۲۰- پدیده پرش دو گانه در پاسخ فرکانسی توان تولیدی [۲۱].

ژو و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۱۵، مکانیزمی را ارائه دادند که در آن، ارتعاشات موجود در همه جهات از محیط اطراف که معمولاً فرکانس پایینی دارند، دریافت می‌شود. با استفاده از قابلیت تبدیل فرکانس پایین به بالا به وسیله تشدید داخلی، توان تولیدی برداشت شده افزایش می‌یابد (شکل ۱-۲۱).

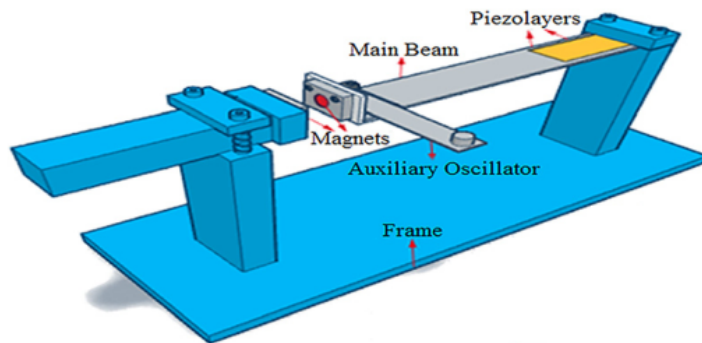
¹Saturation

²Double-jumping (Double-bending)



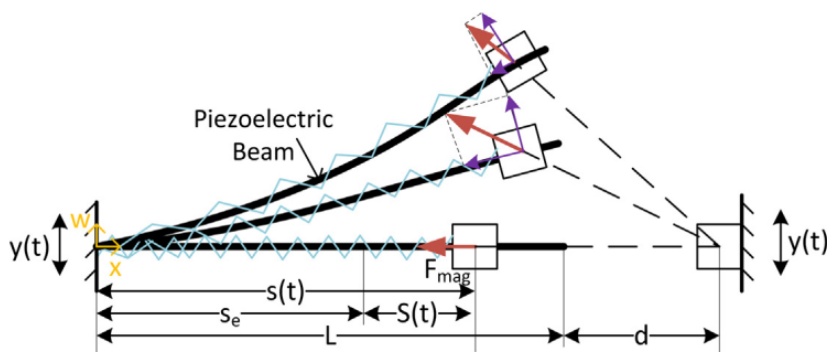
شکل ۱-۲۱- برداشت کننده انرژی همه جهته با استفاده از تشدید داخلی [۲۲].

ژیانگ و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۱۶، با اضافه کردن یک سیستم مرتعش کمکی به سیستم برداشت کننده اصلی و با طراحی و اعمال تشدید داخلی، محدوده فرکانسی پاسخ را تا ۱۳۰ درصد افزایش دادند (شکل ۱-۲۲).



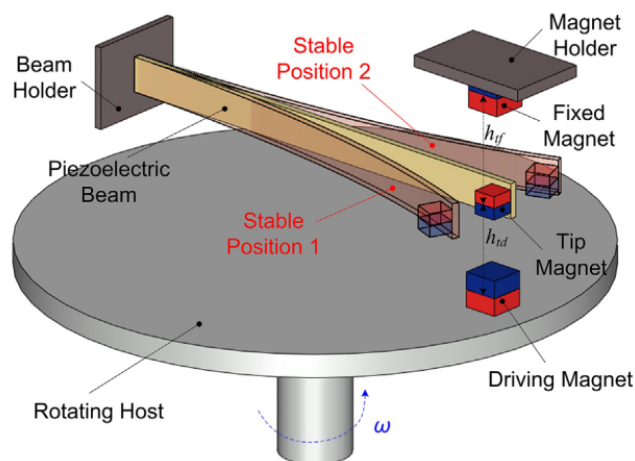
شکل ۱-۲۲- سیستم ارائه شده توسط ژیانگ و همکاران [۲۳].

رمضان پور و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۱۶، با طراحی سیستمی دوار با قابلیت تبدیل فرکانس پایین به بالا به وسیله آهنربا، توان تولیدی را تا ۲ برابر افزایش دادند. یانگ و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۱۷، سیستمی بر مبنای ایجاد تشدید داخلی ارائه دادند که در آن محدوده فرکانسی پاسخ نسبت به سیستم‌های دو پایداره معمولی، وسیع تر می‌شود. ایجاد تشدید داخلی در این جا توسط جرم مغناطیسی متصل به فنر محوری انجام می‌شود (شکل ۱-۲۳).



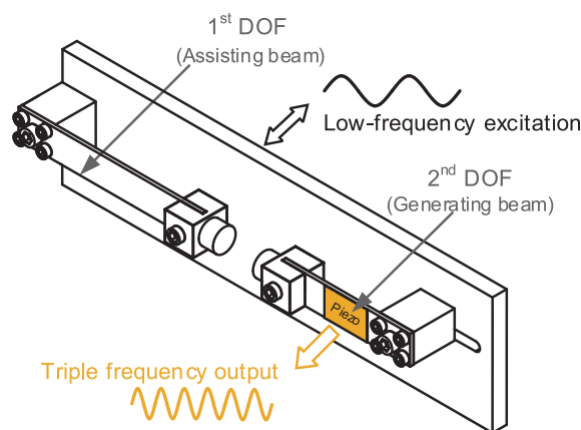
شکل ۱-۲۳- سیستم ارائه شده توسط یانگ و همکاران [۲۵].

فو و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۹، با استفاده از روش‌های دو پایداره کردن سیستم و تبدیل فرکانس پایین به بالا، سیستمی را پیشنهاد دادند که در این سیستم به وسیله آهنربای چرخان، فرکانس پایین تحریک به فرکانس بالا تبدیل می‌شود. آهنربای ثابت بالا، ایجاد حالت دو پایداره در حالت استاتیکی کرده که در حالت دینامیکی نیز رخ می‌دهد (شکل ۱-۲۴).



شکل ۱-۲۴ - سیستم ارائه شده توسط فو و همکاران [۲۶].

ویو و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۸، مطابق شکل ۱-۲۵ مکانیزمی را ارائه دادند که از دو تیر که بر روی یک پایه سوار شده‌اند، تشکیل شده است.

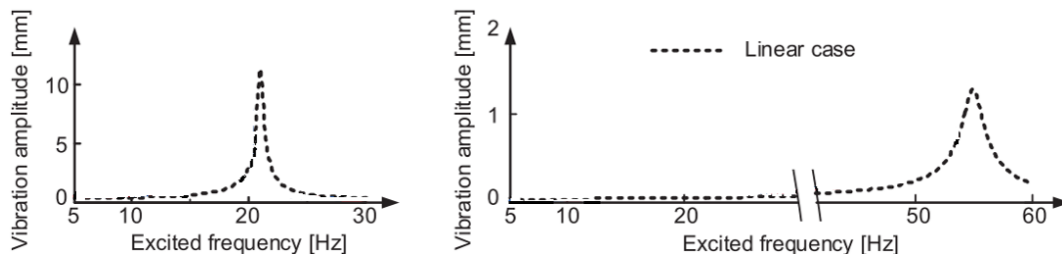


شکل ۱-۲۵ - سیستم ارائه شده توسط ویو و همکاران [۱۵].

بر روی تیر سمت راست یک وصله پیزوالکتریک برای برداشت انرژی نصب شده است. تحریک خارجی به پایه سیستم وارد می‌شود. آن دو سمتی از دو تیر که روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند، آهنربا قرار داده شده تا دو تیر از طریق نیروی غیرخطی آهنربا به یکدیگر مرتبط^۱ (کوپل) شوند. اگر آهنربا وجود نداشته باشد، سیستم مورد نظر یک سیستم

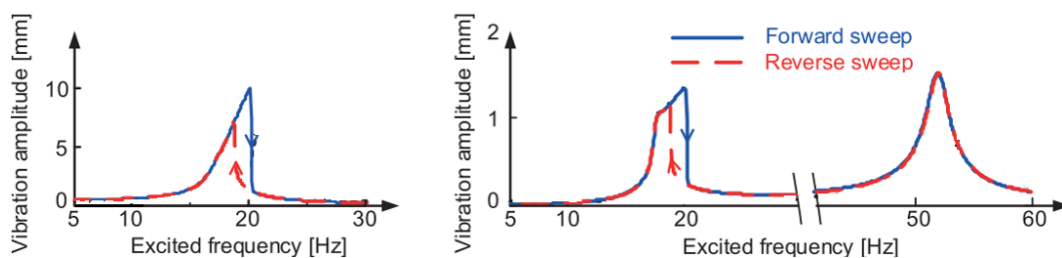
^۱Couple

خطی در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲۶-۱ مشاهده می‌شود، با رسم پاسخ فرکانسی در حالت خطی، هریک از تیرها در فرکانس طبیعی خودشان دارای بیشترین دامنه ارتعاشی هستند. پاسخ‌های فرکانسی رسم شده در سمت چپ و راست شکل ۲۶-۱، به ترتیب مربوط به تیرهای سمت چپ و راست شکل ۲۵-۱ هستند. فرکانس طبیعی تیر سمت راست تقریباً ۳ برابر فرکانس طبیعی تیر سمت چپ است.



شکل ۲۶-۱ - پاسخ فرکانسی سیستم شکل ۲۵-۱ در حالت خطی [۱۵].

با طراحی سیستم بر مبنای ایجاد تشدید داخلی، پاسخ‌های فرکانسی آن با فرکانس تحریک نزدیک ۲۰ هرتز، در شکل ۲۷-۱ رسم شده‌اند.



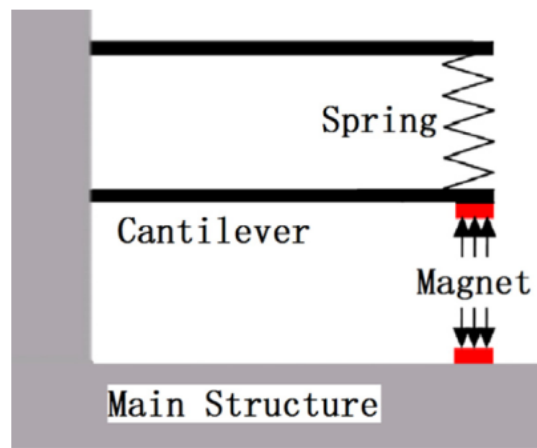
شکل ۲۷-۱ - پاسخ فرکانسی سیستم شکل ۲۵-۱ در حالت غیرخطی [۱۵].

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تیر سمت چپ در اطراف فرکانس طبیعی حالت خطی خود یعنی ۲۱ هرتز، دارای بیشترین دامنه ارتعاشی است. تیر سمت راست علاوه بر این که در اطراف فرکانس طبیعی تیر سمت چپ یعنی ۲۱ هرتز، دارای دامنه بزرگی است، در اطراف فرکانس طبیعی خود یعنی ۵۴ هرتز نیز دارای دامنه ارتعاشی قابل توجهی است. این پدیده به دلیل وجود تشدید داخلی اتفاق افتاده است. تشدید داخلی باعث شد، تیر سمت راست علاوه بر این که در فرکانس طبیعی تیر سمت چپ که فرکانس پایینی است، دامنه بزرگی دارد، در فرکانس طبیعی خود نیز که نزدیک سه برابر فرکانس تحریک است، دارای دامنه قابل توجهی باشد. در حقیقت تشدید داخلی سبب شد که تیر سمت راست با فرکانس تحریک نزدیک $\frac{1}{3}$ فرکانس طبیعی آن نیز، تحریک شود.

بنابراین هر سیستمی که در آن تشدید داخلی رخ دهد، می‌تواند گزینه مناسبی برای سیستم‌های برداشت انرژی باشد.

۵-۱ موضوع پژوهش و هدف از انجام آن

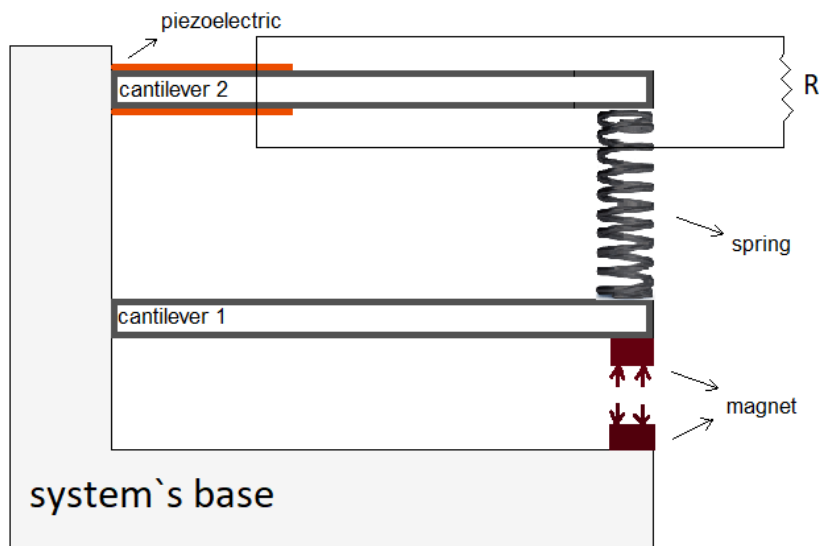
در این پژوهش از سیستم ارائه شده توسط چن و همکاران [۲۷] ایده گرفته شده است (شکل ۱-۲۸). چن و همکاران در سال ۲۰۱۵، مکانیزمی را ارائه دادند که در آن خواص تیرها و ثابت فنر، به گونه‌ای طراحی شده که در آن تشدید داخلی رخ دهد. آن‌ها فقط اثر تشدید داخلی در این سیستم را به صورت نظری بررسی نمودند. ژانگ و همکاران [۲۸] نیز در سال ۲۰۱۷، تشدید اولیه سیستم فوق را بدون در نظر گرفتن تشدید داخلی بررسی نمودند. در این دو پژوهش تنها به بررسی پاسخ تیر به صورت نظری پرداخته شده و برداشت انرژی در این سیستم مورد بررسی قرار نگرفته است.



شکل ۱-۲۸ - سیستم ارائه شده توسط چن و همکاران [۲۷].

در این پژوهش، هدف استفاده از سیستم ارائه شده توسط چن برای برداشت انرژی است. بدین منظور، سیستم چن بر مبنای ایجاد تشدید داخلی از نو طراحی شد. مدل‌سازی ریاضی انجام شده در این تحقیق نیز با مدل ارائه شده توسط چن متفاوت است. در ادامه برای صحت‌سنجی مدل ارائه شده، از نتایج آزمایشگاهی نیز استفاده شده است. شکل ۱-۲۹ طرح اولیه سیستم مورد استفاده در این پژوهش را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، سیستم از یک پایه تشکیل شده است که دارای دو تیر یک سرگیردار متصل به آن می‌باشد. در حالت کلی فقط طول دو تیر یکسان بوده و سایر پارامترها همانند جنس تیر، ابعاد و شکل سطح مقطع و غیره به گونه‌ای طراحی می‌شوند که در سیستم تشدید داخلی رخ دهد. انتهای آزاد دو تیر به وسیله یک فنر به یکدیگر متصل شده است. تیر اولی (پایینی)، علاوه بر شرط مرزی فنر، تحت نیروی دافعه آهنربا نیز قرار گرفته است. وصله‌های پیزوالکتریک، بخشی از سطوح بالا و پایین تیر دوم (بالایی) را پوشانده است. وصله‌های بالا و پایین به کمک مقاومت R به صورت موازی یا سری قابل اتصال هستند. هدف از این پژوهش، طراحی پارامترهای سیستم به گونه‌ای است که وقتی پایه سیستم تحت تحریک خارجی قرار گرفت، با ایجاد تشدید داخلی، بازده برداشت‌کننده انرژی نسبت به حالت خطی (بدون وجود آهنربا) افزایش یابد. هنگامی که تشدید داخلی در سیستم پیشنهادی رخ می‌دهد، انرژی بین موده‌های اول و دوم آن جابه‌جا شده و همزمان

مودهای اول و دوم با یکدیگر تحریک می‌شوند. برداشت انرژی از سیستم پیشنهادی، تا به امروز مورد مطالعه قرار نگرفته است.



شکل ۱-۲۹ - طرح اولیه سیستم پیشنهادی برای برداشت انرژی به وسیله وصله پیزوالکتریک.

همان‌طور که اشاره شد، شکل ۱-۲۹ طرح اولیه سیستم پیشنهادی است، در ادامه به دلیل این که قرار است آزمایش تجربی نیز انجام شود، طرح اولیه پیشنهادی اصلاح می‌گردد که جزئیات آن در فصل ۲ ارائه خواهد شد.

۶-۱ ساختار پایان‌نامه

در این فصل ابتدا بر کارهای انجام شده در زمینه برداشت انرژی به وسیله مواد پیزوالکتریک مروری انجام شد و مشخص گردید که یکی از مشکلات سیستم‌های برداشت‌کننده خطی، کوچک بودن پهنای باند برداشت انرژی در آنها است. برای رفع این مشکل می‌توان اثر غیرخطی به همراه پدیده تشدید داخلی را به سیستم برداشت‌کننده انرژی اضافه کرد. در انتهای فصل، موضوع پژوهش و هدف از انجام آن شرح داده شد. در فصل ۲، مدل‌سازی سیستم تیر دوگانه گیردار به روش انرژی انجام شده و سپس معادلات حرکت به وسیله روش گسسته‌سازی مودهای فرضی استخراج می‌گردند. در مدل‌سازی، سیستم پیشنهادی به شکل یک سیستم دو درجه آزادی مدل شده است. در ادامه در فصل ۳، معادلات حرکت به وسیله روش تحلیلی تقریبی مقیاس‌های زمانی چندگانه حل می‌گردند. در فصل ۴ ابزار تجربی پژوهش معرفی می‌گردد که برای صحت‌سنجی مدل‌سازی انجام شده، ساخته شده است. در ادامه روند انجام آزمایش تجربی نیز شرح داده می‌شود. در فصل ۵ نتایج پژوهش حاضر شامل نتایج تجربی و نظری ارائه می‌شوند. در نهایت پایان‌نامه با فصل ۶ به پایان می‌رسد که در آن بر پژوهش انجام شده و نتایج آن مروری خواهد شد و در انتهای آن فصل، پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آینده معرفی می‌گردند.

فصل دوم

مدل سازی تیر دوگانه گیردار دارای تشدید داخلی

در این فصل ابتدا برای مدل سازی تیر دوگانه گیردار به روش انرژی، تمام انرژی های سیستم پیشنهادی شامل انرژی های جنبشی، پتانسیل، الکتریکی و هم چنین کار نیروی های خارجی استخراج می شوند. در ادامه معادلات حرکت گسسته شده، به وسیله ی روش مودهای فرضی^۱ استخراج می شوند.

۱-۲ مدل سازی ریاضی

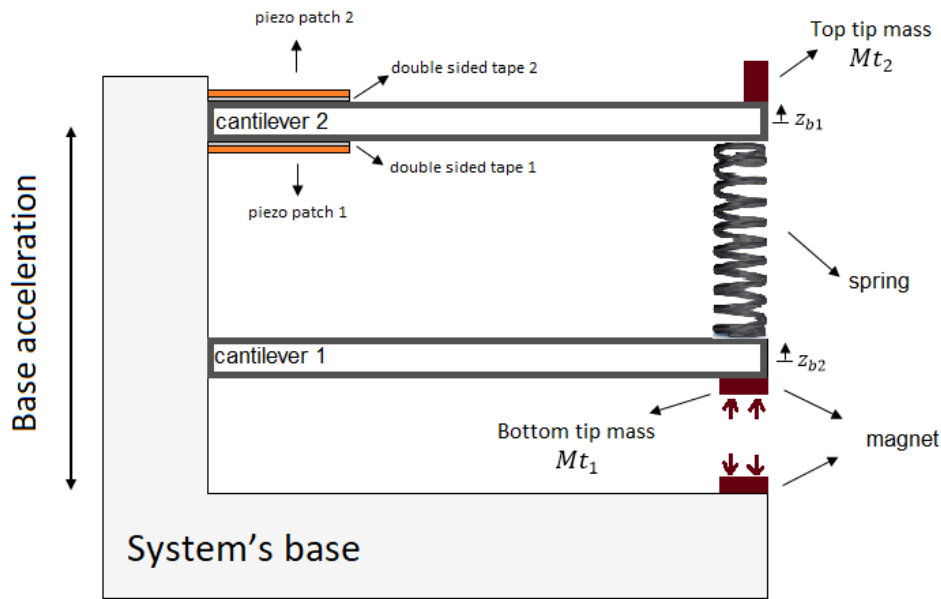
شکل ۱-۲، سیستم پیشنهادی برای برداشت انرژی در این پژوهش را نشان می دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می شود، سیستم برداشت انرژی از دو تیر یک سر گیردار تشکیل شده که به وسیله ی یک فنر خطی که در انتهای طول آن ها قرار گرفته، به یکدیگر متصل می شوند. تیر یک سر گیردار پایین تحت نیروی غیرخطی آهنربا قرار گرفته که توسط یک جفت آهنربا تولید می شود. یک آهنربا بر انتهای تیر یک سر گیردار پایین نصب شده^۲ و آهنربای دیگر بر روی پایه سیستم^۳ قرار گرفته است. تیر گیردار بالا نسبت به محور میانی خود متقارن است (تقارن هندسی دارد). از این جا به بعد برای اشاره به تیر گیردار پایین و لایه وسطی تیر یک سر گیردار بالا، به ترتیب از عبارت های "تیر پایین" و

^۱ Assumed modes

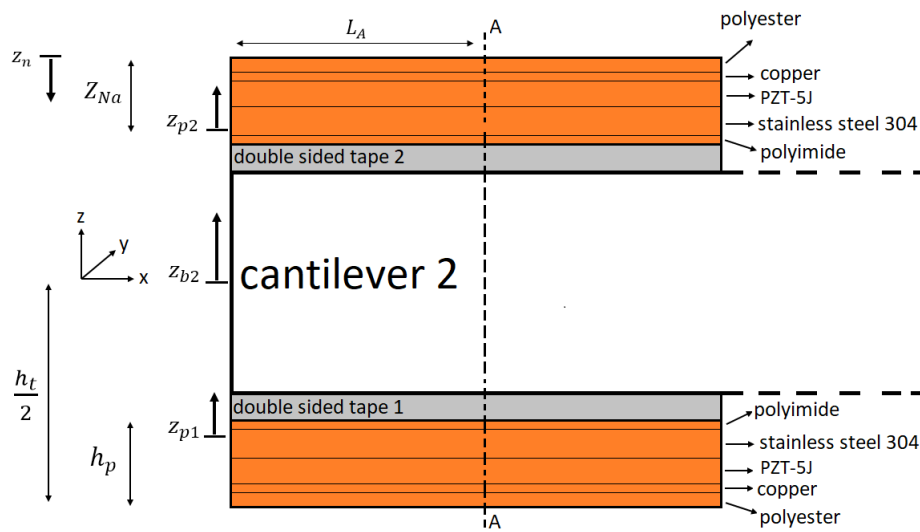
^۲ Bottom tip mass

^۳ Sytem's base

”تیر بالا” استفاده می شود.



(الف) نمای کلی سیستم پیشنهادی.



(ب) بزرگنمایی بخشی از شکل ۱-۲-الف.

شکل ۱-۲ - سیستم پیشنهاد شده برای برداشت انرژی در این پژوهش.

وصله‌های پیزوالکتریک به صورت متقارن بر روی بخشی از تیر بالا برای برداشت انرژی نصب شده‌اند. دو وصله پیزوالکتریک هر یک خود از چند زیر لایه تشکیل شده‌اند که زیر لایه پیزوالکتریک آن‌ها از جنس PZT-5J است و می‌توانند به صورت سری یا موازی به یکدیگر متصل شوند. جهت قطبش^۱ در زیر لایه‌های پیزوالکتریک بالا و پایین، به ترتیب به سمت بالا و پایین است. وصله‌های پیزوالکتریک استفاده شده در این پژوهش، در شرکت ماید^۲ [۲۹] تولید

^۱ Poling direction

^۲ Mide technology

شده‌اند و از مدل PPA-1001 هستند. در آزمایش، وصله‌های پیزوالکتریک توسط چسب دو طرفه^۱ به سطح تیر بالا چسبانده می‌شوند. جرم نصب شده در انتهای تیر بالا^۲ برای تنظیم فرکانس‌های طبیعی به کار رفته است. تحریک خارجی در جهت عمودی بر پایه سیستم عمل کرده و از نوع شتاب پایه می‌باشد. پارامترهای سیستم به گونه‌ای طراحی می‌شوند که تشدید داخلی در سیستم رخ دهد.

۱-۱-۲ معادلات حاکم بر سیستم

در این قسمت معادلات حرکت سیستم تیر دوگانه گیردار به وسیله روش انرژی استخراج می‌شوند. برای این منظور لازم است تمام انرژی‌های جنبشی و پتانسیل هریک از اجزای سیستم مورد بررسی، محاسبه گردند. تنش در تیرهای پایین، بالا و وصله‌های پیزوالکتریک پایین و بالا، به صورت خمش خالص^۳ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین هریک از آن‌ها تار خنثی^۴ جداگانه برای خودشان دارند که در شکل ۱-۲ مشخص شده است. برای اشاره به فاصله تا تار خنثی در تیرهای پایین، بالا و وصله‌های پیزوالکتریک پایین و بالا به ترتیب از نمادهای z_{b1} ، z_{b2} ، z_{p1} و z_{p2} استفاده می‌شود. میدان‌های جابه‌جایی عمودی متعلق به تار خنثی تیرهای پایین، بالا و پیزوالکتریک بالایی نسبت به پایه سیستم به ترتیب با نمادهای $w_1(x, t)$ ، $w_2(x, t)$ و $w_{p2}(x, t)$ نمایش داده می‌شوند، که پارامتر x از ابتدای طرف گیردار تیرها اندازه‌گیری می‌شود. میدان‌های جابه‌جایی عمودی در جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته شده و جابه‌جایی وصله‌های پیزوالکتریک بالا و پایین به دلیل اثر تقارن دارای اندازه یکسانی هستند (یعنی $w_{p2}(x, t) = w_{p1}(x, t)$). بنابراین با توجه به اثر تقارن، به جای محاسبه جداگانه انرژی‌های وصله‌های پیزوالکتریک بالا و پایین، فقط انرژی‌های متعلق به وصله پیزوالکتریک بالا محاسبه شده و در دو ضرب می‌شوند.

با توجه به فرض خمش خالص، میدان‌های جابه‌جایی محوری نسبی متعلق به تیرهای بالا، پایین و وصله پیزوالکتریک بالا، از رابطه (۱-۲) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -z_{b1} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \\ u_2(x, t) &= -z_{b2} \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial x} \\ u_{p2}(x, t) &= -z_{p2} \frac{\partial w_{p2}(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (1-2)$$

در این رابطه، نمادهای $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ و $u_{p2}(x, t)$ به ترتیب به میدان جابه‌جایی محوری نسبی تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا اشاره دارند. کرنش محوری تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا به ترتیب با

¹Double-sided tape

²Top tip mass

³Pure bending

⁴Neutral axis

نمادهای $\varepsilon_1(x, t)$ ، $\varepsilon_2(x, t)$ و $\varepsilon_{p2}(x, t)$ نمایش داده شده و در رابطه (۲-۲) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x, t) &= -z_{b1} \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x^2} \\ \varepsilon_2(x, t) &= -z_{b2} \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{p2}(x, t) &= -z_{p2} \frac{\partial^2 w_{p2}(x, t)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (2-2)$$

برای مدل‌سازی چسب‌های دو طرفه که وصله‌های پیزوالکتریک بالا و پایین را به تیر بالا متصل می‌کنند، از فرض تنش برشی خالص^۱ استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، در مدل‌سازی چسب‌های دو طرفه از جابه‌جایی عمودی آن‌ها در برابر تغییر شکل برشی صرف نظر می‌گردد. با توجه به شکل ۲-۱-ب و تقارن موجود در تیر یک سرگیردار بالا، به جای محاسبه جداگانه انرژی کرنشی برشی در چسب‌های دو طرفه بالا و پایین، انرژی کرنشی برشی چسب بالا محاسبه شده و در دو ضرب می‌شود. کرنش برشی چسب دو طرفه بالا در رابطه (۳-۲) داده شده است. این رابطه به طور تقریبی از جابه‌جایی محوری نسبی بالاترین سطح تیر بالا و پایین‌ترین سطح وصله پیزوالکتریک بالا به دست آمده است.

$$\gamma_s = \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial z} + \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\Delta u_s(x, t)}{\Delta z} = \frac{u_{p2}^- - u_2^+}{t_s} \quad (3-2)$$

نمادهای γ_s ، u_s ، w_s ، u_{p2}^- ، u_2^+ و t_s در رابطه (۳-۲)، به ترتیب بیان‌گر کرنش برشی چسب دو طرفه بالا در صفحه xz، میدان جابه‌جایی محوری نسبی چسب بالا، میدان جابه‌جایی عمودی نسبی چسب بالا، جابه‌جایی محوری نسبی پایین‌ترین سطح وصله پیزوالکتریک بالا، جابه‌جایی محوری نسبی بالاترین سطح تیر بالا و ضخامت چسب دو طرفه هستند.

انرژی پتانسیل کل سیستم از رابطه

$$U_t = U_{t_{se}} + U_s + U_w \quad (4-2)$$

استخراج می‌شود که نمادهای U_t ، $U_{t_{se}}$ ، U_s و U_w به ترتیب به انرژی پتانسیل کل سیستم، انرژی کرنشی کل، انرژی ذخیره شده در فنر خطی و انرژی پتانسیل حاصل از وزن کل سیستم اشاره دارند.

انرژی کرنشی سیستم از انرژی‌های کرنشی خمشی و برشی تشکیل شده که در رابطه (۵-۲) داده شده است.

$$U_{t_{se}} = U_{bending} + U_{shear}$$

^۱Pure shear deformation

$$U_{bending} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV$$

$$U_{shear} = \frac{1}{2} \int_V \gamma \tau dV \quad (5-2)$$

نمادهای $U_{bending}$ ، U_{shear} ، ε ، σ ، γ ، τ و V به ترتیب نمایانگر انرژی کرنشی خمشی، انرژی کرنشی برشی، کرنش محوری، تنش محوری، کرنش برشی، تنش برشی و المان حجم انتگرال سه گانه هستند. تمام کرنش‌های مورد نیاز سیستم مورد بررسی در روابط (۲-۲) و (۳-۲) داده شده‌اند. مواد سازنده تیرهای پایین و بالا، چسب‌های دو طرفه و وصله‌های پیزوالکتریک به جز زیر لایه PZT-5، دارای خاصیت همسانگردی^۱ هستند. بنابراین تنش در این مواد از قانون هوک پیروی می‌کند:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6-2)$$

$$\tau = G\gamma$$

در این رابطه نمادهای E و G به ترتیب نشان‌دهنده مدول الاستیک^۲ و مدول برشی^۳ هستند. لایه PZT-5J در وصله‌های پیزوالکتریک دارای خاصیت غیر همسانگردی^۴ است که معادله ساختاری^۵ آن در رابطه (۷-۲) ارائه شده است [۱۲].

$$\sigma = \bar{c}_{11}^E \varepsilon - \bar{e}_{31} E_z \quad (7-2)$$

در این رابطه نمادهای \bar{c}_{11}^E ، \bar{e}_{31} و E_z به ترتیب بیانگر مدول الاستیک ماده PZT-5J در میدان الکتریکی ثابت، ثابت تنش موثر پیزوالکتریک^۶ و مولفه میدان الکتریکی در جهت Z (یا هم راستا با جهت قطبش) هستند [۱۲]. پارامتر \bar{e}_{31} از حاصل ضرب ثابت پیزوالکتریک d_{31} در مدول الاستیک ماده پیزوالکتریک به دست می‌آید (یعنی $d_{31} \cdot \bar{c}_{11}^E$) [۱۲]. در محاسبه میدان الکتریکی با فرض این که تابع پتانسیل الکتریکی با فاصله میان دو الکتروود در زیر لایه PZT-5J به صورت خطی تغییر می‌کند، می‌توان از ولتاژ تولیدی در محاسبه میدان الکتریکی استفاده کرد. بنابراین میدان الکتریکی را می‌توان از تقسیم کردن ولتاژ تولیدی بر فاصله میان الکتروودها (ضخامت لایه PZT-5J) محاسبه نمود.

با جایگذاری روابط (۲-۲)، (۳-۲)، (۶-۲) و (۷-۲) در رابطه (۵-۲)، انرژی کرنشی کل سیستم پیشنهادی استخراج

¹Isotropic

²Elastic modulus

³Shear modulus

⁴Anisotropic

⁵Constitutive equation

⁶Effective piezoelectric stress constant

می‌شود که در رابطه (۸-۲) ارائه شده است.

$$\begin{aligned}
 U_{t_{se}} = & \frac{1}{2} \int_0^L D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L D_2 \left(\frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_p} (2D_p) \left(\frac{\partial^2 w_{p2}(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_s} (2G_s t_s b_s) \left(\frac{u_{p2}^- - u_2^+}{t_s} \right)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_p} Bv(t) \frac{\partial^2 w_{p2}(x,t)}{\partial x^2} dx
 \end{aligned} \tag{۸-۲}$$

در این رابطه، نمادهای $D_1, D_2, D_p, L, G_s, L_s, L_p, b_s, v(t)$ و B به ترتیب بیان‌گر سختی خمشی^۱ تیرهای پایین و بالا، مدول برشی چسب، طول تیر بالا (یا پایین)، طول وصله پیزوالکتریک بالا، طول چسب دو طرفه، عرض چسب دو طرفه، ولتاژ تولیدی در زیر لایه‌های PZT-5J از وصله‌های پیزوالکتریک و پارامتر کوپل‌کننده^۲ خاصیت‌های مکانیکی و الکتریکی زیر لایه PZT-5J هستند. پارامتر کوپل‌کننده B دو حوزه مکانیکی و الکتریکی را به یکدیگر مرتبط کرده و مقدار آن به نحوه اتصال سری و موازی زیر لایه‌های PZT-5J در وصله‌های پیزوالکتریک بستگی دارد، به طوری که مقدار آن در اتصال موازی دو برابر مقدار آن در اتصال سری است. همان‌طور که در شکل ۱-۲-ب مشاهده می‌شود، وصله‌های پیزوالکتریک از چندین لایه با جنس متفاوت تشکیل شده‌اند، بنابراین پارامتر D_p در رابطه (۸-۲) بیان‌گر سختی خمشی معادل^۳ وصله پیزوالکتریک بالا (یا پایین) است. روابط محاسبه بعضی از پارامترهای استفاده شده در رابطه (۸-۲)، در رابطه (پ-۱) از پیوست پ-۱ ارائه شده است.

انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر خطی که انتهای دو تیر یک سرگیردار را به یکدیگر متصل می‌کند، در رابطه (۹-۲) ارائه شده که در آن نمادهای k, x_{cs1} و x_{cs2} به ترتیب بیان‌گر ثابت فنر، موقعیت محور تقارن فنر روی تیر پایین و بالا هستند.

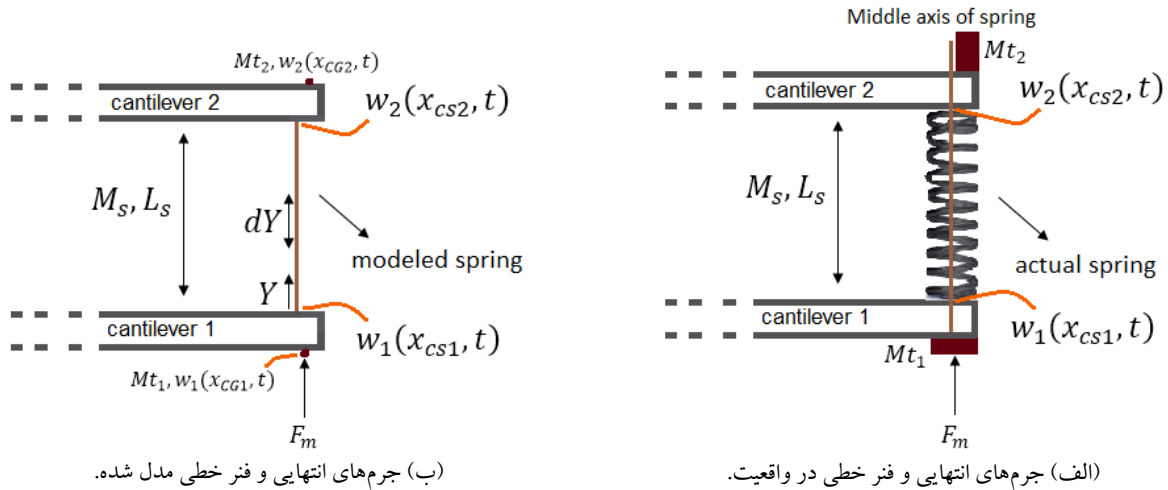
$$U_s = \frac{1}{2} k \left(w_2(x_{cs2}, t) - w_1(x_{cs1}, t) \right)^2 \tag{۹-۲}$$

با توجه به شکل ۲-۲ و این که در واقعیت فنر به شکل استوانه است، در مدل‌سازی آن فرض می‌شود که فنر با یک فاصله‌ای از انتهای تیرها قرار گرفته است (در حقیقت محور تقارن فنر در واقعیت به عنوان یک فنر خطی مدل شده که از انتهای تیر به اندازه شعاع فنر فاصله دارد).

^۱Bending stiffness

^۲Coupling parameter

^۳Equivalent bending stiffness



شکل ۲-۲ - جرم‌های انتهایی و فنر خطی در واقعیت و مدل‌سازی.

با توجه به شکل‌های ۱-۲ و ۲-۲، انرژی پتانسیل حاصل از وزن کل سیستم مورد بررسی، در رابطه (۱۰-۲) داده شده است.

$$U_w = \int_0^L m_1 g w_1(x, t) dx + \int_0^L m_2 g w_2(x, t) dx + \int_0^{L_p} (2m_p) g w_{p2}(x, t) dx + M_{t1} g w_1(x_{CG1}, t) + M_{t2} g w_2(x_{CG2}, t) + \frac{M_s g}{2} (w_1(x_{CS1}, t) + w_2(x_{CS2}, t)) \quad (10-2)$$

در رابطه (۱۰-۲)، نمادهای g و x_{CG2} , x_{CG1} , M_{t2} , M_{t1} , M_s , m_2 , m_1 به ترتیب نمایانگر پارامترهای جرم واحد طول تیر پایین و تیر بالا، جرم فنر، مقدار جرم در جرم‌های انتهایی پایین و بالا، موقعیت مرکز جرم در جرم‌های انتهایی پایین و بالا و شتاب گرانش هستند. به دلیل چند لایه‌ای بودن وصله‌های پیزوالکتریک، نماد m_p به جرم واحد طول معادل^۱ وصله پیزوالکتریک بالا (یا پایین) اشاره دارد که در رابطه (پ-۲) از پیوست پ-۱ تعریف شده است. با توجه به شکل‌های ۱-۲-الف و ۲-۲، تیر پایین تحت نیروی غیرخطی آهنربا قرار گرفته است. بنابراین کار مجازی نیروی آهنربا توسط رابطه (۱۱-۲) بیان می‌شود.

$$\delta W_m = F_m \delta w_1(x_{CG1}) \quad (11-2)$$

که در آن نمادهای F_m و $\delta w_1(x_{CG1})$ به ترتیب به کار مجازی نیروی آهنربا، نیروی غیرخطی آهنربا و جابه‌جایی مجازی مرکز جرم در جرم انتهایی پایین اشاره دارند. با توجه به شکل ۲-۲، نیروی آهنربا به صورت یک نیروی نقطه‌ای^۲ در نظر گرفته می‌شود که به مرکز جرم انتهایی پایین وارد می‌شود. نیروی غیرخطی آهنربا تابعی از

¹Equivalent mass per unit length

²Point force

فاصله بین دو آهنربا (x_m) است که می‌توان آن را به صورت رابطه (۱۲-۲) در نظر گرفت.

$$F_m = a_m \exp(b_m x_m) + c_m \exp(d_m x_m) \quad (12-2)$$

پارامترهای a_m ، b_m ، c_m و d_m ضرایب ثابت نیروی آهنربا هستند که از طریق انجام آزمایش به دست خواهند آمد (در رابطه (۱-۴) مقدار آن‌ها مشخص شده است). در محاسبه رابطه (۱۱-۲) فرض شده که نیروی آهنربا و جابه‌جایی جرم انتهایی پایین دارای راستای یکسان هستند (در ادامه در مدل‌سازی تیرهای بالا و پایین از فرض اوپلر-برنولی استفاده خواهد شد، با توجه به این فرض شیب نقاط انتهایی تیر پایین کوچک است و می‌توان فرض کرد نیروی آهنربا در راستای جابه‌جایی جرم انتهایی پایین به آن وارد می‌شود). بنابراین فاصله بین دو آهنربا به صورت رابطه (۱۳-۲) خواهد بود.

$$x_m = D_m + w_1(x_{CG1}, t) \quad (13-2)$$

که D_m به فاصله اولیه بین دو آهنربا زمانی که تیرهای دو گانه افقی هستند و خیزی در آن‌ها رخ نداده است، اشاره دارد. به دلیل این که زیر لایه PZT-5J از وصله پیزوالکتریک دارای خاصیت الکتریکی نیز هست، برای آن انرژی الکتریکی نیز تعریف می‌شود:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V E_z D_z dV \quad (14-2)$$

در رابطه (۱۴-۲)، نمادهای W_e و D_z به ترتیب نشان‌دهنده انرژی الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی (چگالی شار الکتریکی)^۱ در جهت Z هستند. جابه‌جایی الکتریکی مطابق رابطه (۱۵-۲) تعریف می‌شود.

$$D_z = \bar{\epsilon}_{31}^S \varepsilon + \bar{\epsilon}_{33}^S E_z \quad (15-2)$$

که $\bar{\epsilon}_{33}^S$ نمایانگر ثابت گذردهی در کرنش ثابت^۲ است و از رابطه $\bar{\epsilon}_{33}^S = \bar{\epsilon}_{33}^T - d_{31}^2 \cdot \bar{c}_{11}^E$ محاسبه می‌شود. نماد $\bar{\epsilon}_{33}^T$ به ثابت گذردهی در تنش ثابت^۳ اشاره دارد. بنابراین رابطه (۱۴-۲) به رابطه (۱۶-۲) ساده می‌شود.

$$W_e = \frac{1}{2} c_p v(t)^2 - \frac{1}{2} \int_0^{L_p} Bv(t) \frac{\partial^2 w_{p2}(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (16-2)$$

پارامتر c_p بیانگر ظرفیت خازنی^۴ زیر لایه PZT-5J از وصله پیزوالکتریک است که در رابطه (پ-۳) از پیوست پ-۱

^۱Electric displacement (Electric flux density)

^۲Permittivity component at constant strain

^۳Permittivity component at constant stress

^۴Capacitance

ارائه شده است. مقدار c_p به نوع اتصال زیر لایه‌های PZT-5J بستگی دارد و مقدار آن در اتصال موازی چهار برابر مقدار آن در اتصال سری است. دومین عبارت در رابطه انرژی الکتریکی (۲-۱۶)، در رابطه انرژی کرنشی (۲-۸) نیز آمده بود که دلیل آن ارتباط میان حوزه‌های مکانیک و الکترونیک توسط پارامتر کوپلینگ B بوده و بیان‌گر خاصیت مستقیم و معکوس در پیزوالکترونیک‌ها است.

مقاومت الکتریکی بخشی از انرژی الکتریکی تولید شده در سیستم را تلف می‌کند. بنابراین کار حاصل از آن از رابطه (۲-۱۷) محاسبه می‌شود.

$$\delta W_{nc_e} = Q(t) \delta v \quad (۲-۱۷)$$

که نمادهای δW_{nc_e} ، δv و $Q(t)$ به ترتیب بیان‌گر کار مجازی انرژی الکتریکی اتلاف شده در سیستم توسط مقاومت الکتریکی، ولتاژ تولیدی مجازی و بار الکتریکی تولیدی در زیر لایه‌های PZT-5J هستند. مشتق زمانی بار الکتریکی تولیدی ($Q(t)$) برابر جریان الکتریکی^۱ است که با استفاده از قانون اهم^۲ می‌توان آن را به ولتاژ الکتریکی تولیدی در زیر لایه‌های PZT-5J و مقاومت الکتریکی تبدیل کرد.

انرژی جنبشی کل سیستم پیشنهادی توسط رابطه (۲-۱۸) استخراج می‌گردد.

$$T_t = T_c + T_m + T_s \quad (۲-۱۸)$$

که نمادهای T_t ، T_c ، T_m و T_s به ترتیب نشان‌دهنده انرژی جنبشی کل سیستم پیشنهادی، انرژی جنبشی بخش پیوسته سیستم پیشنهادی، انرژی جنبشی جرم‌های انتهایی و انرژی جنبشی فنر هستند. هر کدام از این پارامترها در ادامه تعریف خواهند شد.

برای استخراج انرژی جنبشی، محاسبه میدان جابه‌جایی مطلق^۳ ضروری است. برای اشاره به جابه‌جایی حاصل از تحریک پایه سیستم^۴ از نماد $w_b(t)$ استفاده می‌شود. بنابراین، میدان جابه‌جایی مطلق از مجموع میدان جابه‌جایی نسبی و جابه‌جایی پایه سیستم به دست می‌آید:

$$\mathbf{u}_{m_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \left\{ \begin{array}{c} -z_{b_1} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \\ 0 \\ w_1(x, t) + w_b(t) \end{array} \right\}$$

¹Electrical current

²Ohm's law

³Absolute displacement field

⁴Base excitation

$$\mathbf{u}_{m_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \begin{Bmatrix} -z_{b2} \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial x} \\ 0 \\ w_2(x, t) + w_b(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}_{m_{p2}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \begin{Bmatrix} -z_{p2} \frac{\partial w_{p2}(x, t)}{\partial x} \\ 0 \\ w_{p2}(x, t) + w_b(t) \end{Bmatrix} \quad (19-2)$$

در رابطه (۱۹-۲)، نمادهای \mathbf{u}_{m_1} ، \mathbf{u}_{m_2} و $\mathbf{u}_{m_{p2}}$ به ترتیب نشان‌دهنده بردار جابه‌جایی مطلق تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا هستند. شکل کلی انرژی جنبشی بخش پیوسته سیستم پیشنهادی مطابق رابطه (۲۰-۲) است.

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{V_1} \rho_1 (\dot{\mathbf{u}}_{m_1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{m_1}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} \rho_2 (\dot{\mathbf{u}}_{m_2} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{m_2}) dV_2 + \frac{1}{2} \int_{V_{p2}} (2\rho_{p2}) (\dot{\mathbf{u}}_{m_{p2}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{m_{p2}}) dV_2 \quad (20-2)$$

که نمادهای ρ_1 ، ρ_2 و ρ_{p2} به ترتیب نشان‌دهنده چگالی تیر پایین، تیر بالا و وصله پیزوالکتریک بالا هستند. از انرژی جنبشی چسب‌های دو طرفه صرف نظر می‌شود. با انجام ساده‌سازی در رابطه (۲۰-۲)، رابطه (۲۱-۲) نتیجه خواهد شد.

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^L m_1 \left(\frac{dw_b(t)}{dt} + \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m_2 \left(\frac{dw_b(t)}{dt} + \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_p} (2m_{p2}) \left(\frac{dw_b(t)}{dt} + \frac{\partial w_{p2}(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (21-2)$$

در استخراج رابطه (۲۱-۲) از فرض تئوری تیر اوپلر-برنولی برای تیرهای پایین، بالا و وصله‌های پیزوالکتریک استفاده شده است. بنابراین از اثر انرژی جنبشی دورانی صرف نظر می‌شود.

با توجه به شکل ۲-۲، جرم‌های نصب شده در انتهای تیرهای پایین و بالا، خود دارای انرژی جنبشی هستند. با در نظر گرفتن آن‌ها به صورت جرم نقطه‌ای^۱، انرژی جنبشی آن‌ها مطابق رابطه (۲۲-۲) خواهد بود.

$$T_m = \frac{1}{2} M_{t1} \left(\frac{dw_b(t)}{dt} + \frac{\partial w_1(x_{CG1}, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M_{t2} \left(\frac{dw_b(t)}{dt} + \frac{\partial w_2(x_{CG2}, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (22-2)$$

به دلیل این که جرم فنر استفاده شده در سیستم مورد بررسی نسبت به جرم تیرهای پایین و بالا و سایر اجزای سیستم قابل صرف نظر کردن نیست، انرژی جنبشی فنر نیز باید در نظر گرفته شود. با توجه به شکل ۲-۲-ب، انرژی جنبشی المان

¹Point mass

در نظر گرفته شده برابر است با:

$$dT_s = \frac{1}{2} \frac{M_s}{L_s} V_s^2 dY \quad (23-2)$$

که نمادهای L_s ، dT_s و V_s به ترتیب به طول فنر، انرژی جنبشی و سرعت مطلق المان در نظر گرفته شده اشاره دارند. با در نظر گرفتن تغییرات میدان سرعت در دو انتهای فنر به صورت خطی، سرعت مطلق المان به دست می‌آید:

$$V_s = \left(\frac{\partial w_2(x_{cs2}, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(x_{cs1}, t)}{\partial t} \right) \frac{Y}{L_s} + \left(\frac{\partial w_1(x_{cs1}, t)}{\partial t} + \frac{dw_b(t)}{dt} \right) \quad (24-2)$$

با جایگذاری رابطه (24-2) در (23-2) و انتگرال‌گیری، رابطه (25-2) نتیجه خواهد شد.

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{M_s}{3} \left(\left(\frac{\partial w_1(x_{cs1}, t)}{\partial t} + \frac{dw_b(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2(x_{cs2}, t)}{\partial t} + \frac{dw_b(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1(x_{cs1}, t)}{\partial t} + \frac{dw_b(t)}{dt} \right) \left(\frac{\partial w_2(x_{cs2}, t)}{\partial t} + \frac{dw_b(t)}{dt} \right) \right) \quad (25-2)$$

در نهایت با توجه به روابطی که استخراج شد، انرژی جنبشی نهایی سیستم (T_t) از رابطه (2-18) به دست می‌آید. در این پژوهش، پس از محاسبه مقادیر انرژی‌های جنبشی، پتانسیل، کار نیروهای خارجی و کار اتلاف شده در سیستم، از روش گسسته‌سازی مودهای فرضی برای استخراج معادلات حرکت سیستم استفاده می‌شود. در روش مودهای فرضی، پاسخ سیستم پیوسته به صورت یک مجموع از حاصل ضرب پاسخ زمانی تیر (مختصات تعمیم یافته¹) در شکل مودهای² فرض شده، در نظر گرفته می‌شود [30]. در سیستم پیشنهادی، میدان‌های جابه‌جایی نسبی تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا بر حسب شکل مودهای فرض شده و مختصات تعمیم یافته در رابطه (2-26) نوشته شده‌اند.

$$w_1(x, t) = W_1(x)a(t) \quad w_2(x, t) = W_2(x)b(t) \quad w_{p2}(x, t) = W_{p2}(x)b(t) \quad (26-2)$$

از هر کدام از تیرهای یک سرگیردار بالا و پایین فقط یک مود (مود اول) انتخاب شده، بنابراین سیستم مورد بررسی (سیستم ارائه شده در شکل 2-1)، به صورت یک سیستم دو درجه آزادی در نظر گرفته شده است. در رابطه (2-26)، نمادهای $W_1(x)$ ، $W_2(x)$ و $W_{p2}(x)$ به ترتیب بیان‌گر شکل مودهای فرض شده برای تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا هستند. هم‌چنین $a(t)$ و $b(t)$ به مختصات تعمیم یافته تیرهای یک سرگیردار پایین و بالا اشاره دارند. مختصات تعمیم یافته تیر بالا و وصله پیزوالکتریک بالا یکسان است، چون آن‌ها با یکدیگر به شکل یک سیستم تیر یک سرگیردار ارتعاش می‌کنند. شکل مودهای فرض شده که در رابطه (2-26) استفاده می‌شوند، باید حداقل بتوانند شرایط

¹Generalized coordinate

²Mode shape

مرزی اساسی^۱ را ارضا کنند. با توجه به توضیحاتی که داده شد، سیستم پیشنهادی به صورت یک سیستم دو درجه آزادی با مختصات تعمیم یافته $a(t)$ و $b(t)$ گسسته سازی شد. پس از گسسته شدن سیستم، معادلات حرکت توسط معادله لاگرانژ^۲ که در رابطه (۲۷-۲) ارائه شده، استخراج می شوند [۱۲].

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T_t}{\partial \dot{a}} \right\} - \frac{\partial T_t}{\partial a} + \frac{\partial U_t}{\partial a} - \frac{\partial W_e}{\partial a} = Q_{nc} \Big|_a$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T_t}{\partial \dot{b}} \right\} - \frac{\partial T_t}{\partial b} + \frac{\partial U_t}{\partial b} - \frac{\partial W_e}{\partial b} = Q_{nc} \Big|_b \quad (27-2)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T_t}{\partial \dot{v}} \right\} - \frac{\partial T_t}{\partial v} + \frac{\partial U_t}{\partial v} - \frac{\partial W_e}{\partial v} = Q_{nc} \Big|_v$$

تعداد معادلاتی که توسط معادله لاگرانژ به دست می آیند، به تعداد مختصات تعمیم یافته بستگی دارد (ولتاژ تولیدی در وصله پیزوالکتریک نیز خود یک مختصه تعمیم یافته است). نمادهای $Q_{nc} \Big|_a$ ، $Q_{nc} \Big|_b$ و $Q_{nc} \Big|_v$ که در رابطه (۲۷-۲) استفاده شده اند، به نیروهای تعمیم یافته^۳ متناظر با هریک از مختصات تعمیم یافته اشاره دارند و توسط روابط (۱۱-۲) و (۱۷-۲) استخراج می شوند. با جایگذاری روابط (۴-۲)، (۱۶-۲) و (۱۸-۲) در رابطه (۲۷-۲) و محاسبه نیروهای تعمیم یافته از روابط (۱۱-۲) و (۱۷-۲)، معادلات حرکت مورد بررسی به دست می آیند:

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_c \\ M_c & M_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{a}(t) \\ \ddot{b}(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_c \\ C_c & C_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_c \\ K_c & K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ v_c \end{Bmatrix} v(t) + \begin{Bmatrix} F_{1g} - F_m W_1(x_{CG1}) \\ F_{2g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (28-الف)$$

$$c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R_l} = v_c \dot{b}(t) \quad (28-ب)$$

تمام پارامترهای استفاده شده در روابط (۲۸-الف)-(۲۸-ب)، در رابطه (پ-۴) از پیوست پ-۱ تعریف شده و بالانویس نقطه^۴ و R_l به ترتیب به مشتق زمانی و مقاومت الکتریکی اشاره دارند. ضرایب ماتریسی بردار مختصات تعمیم یافته $(a(t), b(t))$ ، مشتق و مشتق دوم آن به ترتیب بیان گر ماتریس های سختی خطی، میرایی و جرم هستند.

¹Essential boundary condition

²Lagrange equation

³Generalized forces

⁴Dot superscript

ماتریس میرایی به صورت میرایی تناسبی^۱ در نظر گرفته می‌شود که توسط ضرایب ریلی α و β و با استفاده از ماتریس‌های جرم و سختی خطی به دست می‌آید [۳۱]. رابطه (۲-۲۸الف)، به دلیل حضور نیروی غیرخطی آهنربا در آن، یک رابطه غیرخطی است.

با مشخص شدن مختصات تعمیم یافته و ولتاژ تولیدی از روابط (۲-۲۸الف)-(۲-۲۸ب) و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۲-۲۶)، پاسخ ارتعاشی^۲ تیرهای یک سرگیردار پایین و بالا به همراه ولتاژ تولیدی در وصله‌های پیزوالکتریک به دست خواهند آمد.

۲-۲ جمع‌بندی

در این فصل مدل‌سازی سیستم تیر دوگانه گیردار انجام شد. برای این منظور، ابتدا تمامی انرژی‌های سیستم همانند انرژی جنبشی، پتانسیل و کار نیروهای خارجی استخراج گردید. در محاسبه انرژی‌ها از فرض خمش خالص برای تیرهای پایین، بالا و وصله‌های پیزوالکتریک استفاده شد. هم‌چنین برای چسب‌های دو طرفه از فرض تنش برشی خالص استفاده گردید. سیستم تیر دوگانه گیردار به شکل یک سیستم دو درجه آزادی در نظر گرفته شد. جرم‌های نصب شده در انتهای تیرهای پایین و بالا به شکل جرم نقطه‌ای مدل شدند. هم‌چنین نیروی آهنربا نیز به شکل نیروی نقطه‌ای در نظر گرفته شد. پس از یافتن انرژی‌های سیستم، از روش گسسته‌سازی مودهای فرضی استفاده شد و به وسیله معادله لاگرانژ، معادلات حرکت سیستم تیر دوگانه گیردار استخراج گردید.

¹Proportional Damping

²Vibrational response

فصل سوم

روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

در فصل ۲، مدل‌سازی سیستم تیر دوگانه گیردار انجام گردید و معادلات حرکت آن به وسیله روش گسسته‌سازی مودهای فرضی استخراج شد که در روابط (۲-۲۸الف)-(۲-۲۸ب) ارائه شده‌اند. در این فصل معادلات حرکت به کمک روش تحلیلی تقریبی مقیاس‌های زمانی چندگانه حل می‌گردند.

۱-۳ مقیاس‌های زمانی چندگانه

در این قسمت روابط (۲-۲۸الف)-(۲-۲۸ب) با راه‌حل تحلیلی تقریبی^۱ حل می‌گردند. در این پژوهش از روش تحلیلی تقریبی مقیاس‌های زمانی چندگانه^۲ در حل معادلات حرکت استفاده می‌شود. این روش برای سیستم‌های غیرخطی ضعیف^۳ قابل استفاده است (در سیستم پیشنهادی فرض می‌شود که تحریک ورودی سیستم کوچک است و در نتیجه میدان جابه‌جایی کوچک خواهد شد. بنابراین عبارت‌های غیرخطی که به شکل توان‌هایی از جابه‌جایی است، در برابر عبارت‌های خطی کوچک می‌شوند و می‌توان از نظریه اختلال^۴ برای یافتن پاسخ تحلیلی تقریبی استفاده

¹ Approximate analytical method

² Method of multiple scales (MMS)

³ Weakly nonlinear systems

⁴ Perturbation theory

کرد) [۳۲، ۳۳]. روابطی که قرار است با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل گردند باید به فرم توابع چند جمله‌ای^۱ در آورده شوند. بدین منظور، روابط (۲-۲۸الف)-(۲-۲۸ب) که دارای نیروی غیرخطی آهنربا به صورت تابع نمایی هستند، باید به شکل توابع چند جمله‌ای در بیایند. بنابراین، ابتدا نقاط تعادل^۲ روابط (۲-۲۸الف)-(۲-۲۸ب) با حل رابطه (۱-۳) استخراج می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_c \\ K_c & K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{1g} - F_m W_1(x_{CG1}) \\ F_{2g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱-۳)$$

که (a_0, b_0) نقاط تعادل هستند. با تعریف ارتعاشات حول نقطه تعادل:

$$s(t) = a(t) - a_0 \quad (۲-۳)$$

$$t(t) = b(t) - b_0$$

و استفاده از بسط تیلور^۳، روابط (۲-۲۸الف)-(۲-۲۸ب) به روابط (۳-۳الف)-(۳-۳ب) تبدیل خواهند شد.

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_c \\ M_c & M_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{t}(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_c \\ C_c & C_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{t}(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 + p_1 & K_c \\ K_c & K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ t(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ v_c \end{Bmatrix} v(t) + \begin{Bmatrix} p_2 s^2(t) + p_3 s^3(t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (۳-۳الف)$$

$$c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R_l} = v_c \dot{t}(t) \quad (۳-۳ب)$$

نمادهای p_1 ، p_2 و p_3 بیان‌گر ضرایب بسط تیلور نیروی آهنربا حول نقاط تعادل (a_0, b_0) هستند. هم‌چنین ماتریس سختی که در این معادله مشاهده می‌شود، ماتریس سختی کل سیستم است (یعنی اثری که آهنربا بر سختی سیستم می‌گذارد، نیز در آن در نظر گرفته شده است). در ادامه، برای اشاره به ماتریس سختی کل سیستم از عبارت "ماتریس سختی" استفاده خواهد شد. p_1 نشان‌دهنده سختی است که توسط نیروی آهنربا ساخته می‌شود و p_2 و p_3 بیان‌گر بخش غیرخطی نیروی آهنربا هستند. این ضرایب خود تابع فاصله اولیه بین دو آهنربا (D_m) هستند. با استفاده از تئوری آنالیز مودال^۴، روابط (۳-۴الف)-(۳-۴ج) نتیجه خواهد شد.

$$\mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} v_{m1} & v_{m2} \\ v_{m3} & v_{m4} \end{pmatrix} \quad (۳-۴الف)$$

^۱Polynomial function

^۲Fixed points

^۳Taylor series expansion

^۴Modal analysis theory

$$\mathbf{V}_m^T \begin{pmatrix} M_1 & M_c \\ M_c & M_2 \end{pmatrix} \mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ب-۳)$$

$$\mathbf{V}_m^T \begin{pmatrix} K_1 + p_1 & K_c \\ K_c & K_2 \end{pmatrix} \mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \quad (ج-۳)$$

که نمادهای \mathbf{V}_m ، ω_1 و ω_2 به ترتیب بیانگر ماتریس مودال نرمال شده^۱، فرکانسهای طبیعی اول و دوم سیستم معادل خطی هستند (منظور از سیستم معادل خطی، سیستمی خطی با ماتریسهای جرم و سختی ارائه شده در روابط (۳-۳الف)-(۳-۳ب) است). ماتریس مودال \mathbf{V}_m نسبت به هر دو ماتریس جرم و سختی نرمال شده است. روابط (۳-۳الف)-(۳-۳ب) به صورت یک معادله کوپل شده^۲ هستند.

با استفاده از تغییر متغیر:

$$\begin{Bmatrix} s(t) \\ t(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} v_{m1} & v_{m2} \\ v_{m3} & v_{m4} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \quad (۵-۳)$$

مجموعه روابط (۳-۳الف)-(۳-۳ب) به رابطه (۳-۳ج) تبدیل خواهند شد که یک معادله غیر کوپل^۳ است.

$$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) + \left(q_1 x^2(t) + q_2 x(t)y(t) + q_3 y^2(t) \right) + \left(q_4 x^3(t) + q_5 x^2(t)y(t) + q_6 x(t)y^2(t) + q_7 y^3(t) \right) + \tilde{\theta}_1 v(t) = \tilde{f}_1 = F_1 \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{y}(t) + \alpha_2 \dot{y}(t) + \omega_2^2 y(t) + \left(q_8 x^2(t) + q_9 x(t)y(t) + q_{10} y^2(t) \right) + \left(q_{11} x^3(t) + q_{12} x^2(t)y(t) + q_{13} x(t)y^2(t) + q_{14} y^3(t) \right) + \tilde{\theta}_2 v(t) = \tilde{f}_2 = F_2 \sin(\Omega t)$$

$$c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R_l} + \tilde{\theta}_3 \dot{x}(t) + \tilde{\theta}_4 \dot{y}(t) = 0 \quad (۶-۳)$$

در رابطه (۳-۳ج)، پارامترهای q_1 تا q_3 و q_8 تا q_{10} ، ضرایب غیرخطی مرتبه دوم^۴ هستند. هم‌چنین پارامترهای q_4 تا q_7 و q_{11} تا q_{14} ، ضرایب غیرخطی مرتبه سوم^۵ هستند. بنابراین سیستم مورد بررسی در حالت کلی دارای هر دو ضرایب غیرخطی مرتبه دوم و سوم است. در روابط (۳-۳د)-(۳-۳ه) که در پیوست پ-۱ ارائه شده‌اند، پارامترهای به کار رفته در رابطه (۳-۳ج) تعریف شده‌اند. در ادامه رابطه (۳-۳ج) با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل خواهد شد و سپس با استفاده از روابط (۳-۳د)، (۳-۳ه) و (۲-۲)، پاسخ ارتعاشی هر نقطه از سیستم به همراه ولتاژ تولیدی به دست

¹Normalized modal matrix

²Coupled equation

³Uncoupled equation

⁴Quadratic nonlinear coefficients

⁵Cubic nonlinear coefficients

خواهند آمد.

۱-۱-۳ راه حل مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری ۱

در این قسمت، رابطه (۶-۳) با راه حل مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری ۱ که در مرجع [۳۴] ارائه شده، حل می گردد. هر دوی ضرایب غیرخطی مرتبه دوم و سوم در رابطه (۶-۳)، در این حل در نظر گرفته می شوند. برای استفاده از روش مقیاس های زمانی چندگانه، ابتدا باید عملیات مقیاس گذاری^۱ انجام شود. در مقیاس گذاری، از یک پارامتر با نماد ε استفاده می شود که پارامتر مقیاس گذاری^۲ نام دارد [۳۵]. اگر عملیات مقیاس گذاری بر رابطه (۶-۳) با فرض تشدید اولیه^۳ انجام شود، رابطه (۷-۳) نتیجه خواهد شد.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \varepsilon\alpha_1 \dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) + \varepsilon \left(q_1 x^2(t) + q_2 x(t)y(t) + q_3 y^2(t) + q_4 x^3(t) \right. \\ \left. + q_5 x^2(t)y(t) + q_6 x(t)y^2(t) + q_7 y^3(t) \right) + \varepsilon\tilde{\theta}_1 v(t) = \varepsilon F_1 \sin(\Omega t) \\ \ddot{y}(t) + \varepsilon\alpha_2 \dot{y}(t) + \omega_2^2 y(t) + \varepsilon \left(q_8 x^2(t) + q_9 x(t)y(t) + q_{10} y^2(t) + q_{11} x^3(t) \right. \\ \left. + q_{12} x^2(t)y(t) + q_{13} x(t)y^2(t) + q_{14} y^3(t) \right) + \varepsilon\tilde{\theta}_2 v(t) = \varepsilon F_2 \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (۷-۳)$$

$$c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R_l} + \tilde{\theta}_3 \dot{x}(t) + \tilde{\theta}_4 \dot{y}(t) = 0$$

عملیات مقیاس گذاری رابطه (۷-۳) که در آن ε^1 در عبارت های میرایی، ولتاژ تولیدی، نیرو، ضرایب غیرخطی مرتبه دوم و سوم ضرب می شود، مشابه عملیات مقیاس گذاری است که یانگ و همکاران [۳۶] در معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی خود انجام داده اند. عملیات مقیاس گذاری انجام شده توسط یانگ، فرآیند حل با روش مقیاس های زمانی چندگانه را آسان می کند ولی دقت راه حل کاهش می یابد. در بخش ۳-۱-۲ عملیات مقیاس گذاری جدیدی در این پژوهش پیشنهاد می شود. پس از پایان حل با روش مقیاس های زمانی چندگانه، پارامتر مقیاس گذاری برابر با یک (یعنی $\varepsilon = 1$) در نظر گرفته می شود تا کلیت معادله دیفرانسیل تحت بررسی (۶-۳) تغییری نکند. در حل مقیاس های زمانی چندگانه، پارامتر زمان (t) به صورت تابعی از مقیاس های زمانی^۴ در نظر گرفته می شود. در رابطه (۸-۳) مقیاس های زمانی (T_i) داده شده اند.

$$T_i = \varepsilon^i t, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (۸-۳)$$

¹Scaling

²Scaling parameter

³Primary resonance

⁴Time scales

با توجه به این که بزرگترین توان پارامتر مقیاس گذاری (ε) در رابطه (۷-۳) برابر با یک است، در حل فقط از مقیاس های زمانی T_0 و T_1 استفاده می شود.

گام بعدی در این روش حل، در نظر گرفتن سری مجانبی^۱ برای متغیرهای وابسته به زمان و تحت مشتق گیری یعنی $x(t)$ ، $y(t)$ و $v(t)$ است که در رابطه (۹-۳) ارائه شده اند.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \\ y(t) &= y_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon y_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \\ v(t) &= v_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \end{aligned} \quad (۹-۳)$$

برای محاسبه پاسخها تا تقریب مرتبه اول^۲، فقط محاسبه متغیرهای x_0 ، y_0 و v_0 لازم است. با توجه به این که از مقیاس های زمانی به جای زمان t استفاده می شود، از قانون مشتق گیری زنجیره ای^۳ استفاده می شود:

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

با جایگذاری روابط (۹-۳) و (۱۰-۳) در رابطه (۷-۳) و مرتب کردن آن بر اساس توان های پارامتر مقیاس گذاری، روابط (۱۱-۳) و (۱۲-۳) نتیجه خواهد شد.

$$\begin{aligned} D_0^2 x_0 + \omega_1^2 x_0 &= 0 \\ D_0^2 y_0 + \omega_2^2 y_0 &= 0 \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

$$c_p D_0 v_0 + \frac{v_0}{R_l} + \tilde{\theta}_3 D_0 x_0 + \tilde{\theta}_4 D_0 y_0 = 0$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 + 2D_0 D_1 x_0 + \alpha_1 D_0 x_0 + q_1 x_0^2 + q_2 x_0 y_0 + q_3 y_0^2 + q_4 x_0^3 + q_5 x_0^2 y_0 \\ + q_6 x_0 y_0^2 + q_7 y_0^3 + \tilde{\theta}_1 v_0 - F_1 \sin(\Omega t) &= 0 \\ D_0^2 y_1 + \omega_2^2 y_1 + 2D_0 D_1 y_0 + \alpha_2 D_0 y_0 + q_8 x_0^2 + q_9 x_0 y_0 + q_{10} y_0^2 + q_{11} x_0^3 + q_{12} x_0^2 y_0 \\ + q_{13} x_0 y_0^2 + q_{14} y_0^3 + \tilde{\theta}_2 v_0 - F_2 \sin(\Omega t) &= 0 \end{aligned} \quad (۱۲-۳)$$

^۱Asymptotic series

^۲First-order approximation

^۳Chain's rule

روابط (۱۱-۳) و (۱۲-۳) به ترتیب از برابر صفر قرار دادن ضرایب پارامترهای ε^0 و ε^1 به دست آمده‌اند. پاسخ معادله دیفرانسیل (۱۱-۳) در روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) ارائه شده است. در رابطه (۱۳-۳)، پارامترهای A و B دارای مقدار مختلط هستند و علامت بار^۱ در بالای پارامترها به معنای عملگر مزدوج مختلط است.

$$\begin{aligned} x_0(T_0, T_1) &= A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_1 T_0} \\ y_0(T_0, T_1) &= B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i\omega_2 T_0} \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

$$\begin{aligned} v_0(T_0, T_1) &= -\tilde{\theta}_3 \left(\frac{i\omega_1 e^{i\omega_1 T_0}}{ic_p \omega_1 + \frac{1}{R_l}} A(T_1) - \frac{i\omega_1 e^{-i\omega_1 T_0}}{-ic_p \omega_1 + \frac{1}{R_l}} \bar{A}(T_1) \right) \\ &\quad - \tilde{\theta}_4 \left(\frac{i\omega_2 e^{i\omega_2 T_0}}{ic_p \omega_2 + \frac{1}{R_l}} B(T_1) - \frac{i\omega_2 e^{-i\omega_2 T_0}}{-ic_p \omega_2 + \frac{1}{R_l}} \bar{B}(T_1) \right) \end{aligned} \quad (۱۴-۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) در رابطه (۱۲-۳)، روابط (۱۵-۳ الف)-(۱۵-۳ ب) به دست خواهند آمد.

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 &= \left(-3q_4 A^2 \bar{A} e^{i\omega_1 T_0} - 2q_6 A B \bar{B} e^{i\omega_1 T_0} - 2i\omega_1 D_1 A e^{i\omega_1 T_0} \right. \\ &\quad \left. - i\alpha_1 \omega_1 A e^{i\omega_1 T_0} - \frac{q_2 \bar{A} B e^{i\omega_2 T_0}}{e^{i\omega_1 T_0}} + F_1 \sin(\Omega t) + \frac{i\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_3 A \omega_1 e^{i\omega_1 T_0}}{ic_p \omega_1 + \frac{1}{R_l}} + CC \right) + NST \end{aligned} \quad (۱۵-۳ الف)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 y_1 + \omega_2^2 y_1 &= \left(-2q_{12} A \bar{A} B e^{i\omega_2 T_0} - 3q_{14} B^2 \bar{B} e^{i\omega_2 T_0} - 2i\omega_2 D_1 B e^{i\omega_2 T_0} \right. \\ &\quad \left. - i\alpha_2 \omega_2 B e^{i\omega_2 T_0} - q_8 A^2 (e^{i\omega_1 T_0})^2 + F_2 \sin(\Omega t) + \frac{i\tilde{\theta}_2 \tilde{\theta}_4 B \omega_2 e^{i\omega_2 T_0}}{ic_p \omega_2 + \frac{1}{R_l}} + CC \right) + NST \end{aligned} \quad (۱۵-۳ ب)$$

در روابط (۱۵-۳ الف)-(۱۵-۳ ب) به ترتیب از اختصارهای CC^۲ و NST^۳ برای اشاره به مزدوج مختلط عبارت‌های نوشته شده در رابطه و عبارت‌های غیر سکولار استفاده شده است. با توجه به رابطه (۱۵-۳ الف)، تمام عبارت‌های متناوبی^۴ که فقط دارای فرکانس ω_1 هستند (همانند $e^{i\omega_1 T_0}$)، می‌توانند تشکیل عبارت‌های سکولار^۵ دهند. به طور مشابه برای رابطه (۱۵-۳ ب)، فقط عباراتی که دارای فرکانس ω_2 هستند، تشکیل عبارت سکولار می‌دهند [۳۴]. علاوه بر این، با

^۱Over-bar

^۲Complex conjugate of the written terms

^۳Non-secular terms

^۴Periodic

^۵Secular terms

بررسی روابط (۳-۱۵الف)-(۳-۱۵ب) مشخص می‌شود که اگر فرکانس طبیعی دوم (ω_2)، دو برابر فرکانس طبیعی اول (ω_1) باشد، عبارت‌های سکولار جدیدی می‌توانند تشکیل شوند. این حالت توسط رابطه (۳-۱۶) بیان می‌شود.

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \quad (۳-۱۶)$$

که σ_1 پارامتر تنظیم کننده^۱ در تشدید داخلی نام دارد. اگر در سیستم پیشنهادی رابطه (۳-۱۶) برقرار باشد، در آن تشدید داخلی رخ می‌دهد و انرژی می‌تواند بین دو مود اول آن جابه‌جا شود. بنابراین، برای طراحی سیستم پیشنهادی بر مبنای ایجاد تشدید داخلی در آن، رابطه (۳-۱۶) باید ارضا گردد.

علاوه بر تشدید داخلی، تشدید اولیه هم می‌تواند عبارت سکولار ایجاد کند. در تشدید اولیه فرکانس تحریک (Ω)، نزدیک یا برابر با فرکانس طبیعی سیستم مثلا فرکانس طبیعی اول (ω_1) آن است که توسط رابطه (۳-۱۷) بیان می‌شود.

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \quad (۳-۱۷)$$

در رابطه (۳-۱۷)، نماد σ_2 به پارامتر تنظیم کننده در تشدید اولیه اشاره دارد. بنابراین به طور خلاصه، رابطه (۳-۱۶) باعث ایجاد عبارت سکولار در روابط (۳-۱۵الف)-(۳-۱۵ب) می‌شود. هم‌چنین رابطه (۳-۱۷) تشکیل عبارت سکولار در رابطه (۳-۱۵الف) می‌دهد. بدین جهت، با توجه به توضیحات داده شده، همه عبارت‌های سکولار روابط (۳-۱۵الف)-(۳-۱۵ب) باید استخراج گردند. پارامترهای مختلط A و B که در روابط (۳-۱۳) تا (۳-۱۵ب) استفاده شده‌اند، توسط رابطه (۳-۱۸)، به فرم قطبی^۲ نوشته می‌شوند.

$$A(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta_1(T_1)} \quad (۳-۱۸)$$

$$B(T_1) = \frac{1}{2}b(T_1)e^{i\beta_2(T_1)}$$

که a و b مقدار حقیقی و مثبت دارند. با استخراج عبارت‌های سکولار از روابط (۳-۱۵الف)-(۳-۱۵ب) و با استفاده از رابطه (۳-۱۸) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی آن، چهار عبارت سکولار حقیقی به دست خواهند آمد:

$$\omega_2 b_1 - \tilde{c}_1 b + \frac{1}{2}\alpha_2 \omega_2 b - \frac{1}{4}q_8 a^2 \sin(\gamma_1) = 0 \quad (۳-۱۹)$$

$$\frac{3}{8}q_{14} b^3 + \frac{1}{4}q_{12} a^2 b - \omega_2 b \beta_{21} - \tilde{c}_2 b + \frac{1}{4}q_8 a^2 \cos(\gamma_1) = 0 \quad (۳-۲۰)$$

^۱Detuning parameter

^۲Polar form

$$\frac{3}{8}q_4a^3 + \frac{1}{4}q_6ab^2 - \omega_1a\beta_{11} + \frac{1}{4}q_2ab\cos(\gamma_1) - \frac{1}{2}F_1\sin(\gamma_2) - \tilde{c}_3a = 0 \quad (21-3)$$

$$\omega_1a + \frac{1}{2}\alpha_1\omega_1a + \frac{1}{4}q_2absin(\gamma_1) + \frac{1}{2}F_1\cos(\gamma_2) - \tilde{c}_4a = 0 \quad (22-3)$$

پارامترهای استفاده شده در روابط (۱۹-۳) تا (۲۲-۳)، در روابط (۲۳-الف) تا (۲۳-ج) تعریف شده‌اند.

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_2\tilde{\theta}_4\omega_2R_l}{R_l^2c_p^2\omega_2^2 + 1}$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_2\tilde{\theta}_4\omega_2^2R_l^2c_p}{R_l^2c_p^2\omega_2^2 + 1} \quad (23-الف)$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_3\omega_1^2R_l^2c_p}{R_l^2c_p^2\omega_1^2 + 1}$$

$$\tilde{c}_4 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_3\omega_1R_l}{R_l^2c_p^2\omega_1^2 + 1}$$

$$\gamma_1 = \sigma_1T_1 + \beta_2 - 2\beta_1 \quad (23-ب)$$

$$\gamma_2 = \sigma_2T_1 - \beta_1$$

$$\beta_{j1} = \frac{\partial\beta_j}{\partial T_1}$$

$$a1 = \frac{\partial a}{\partial T_1} \quad (23-ج)$$

$$b1 = \frac{\partial b}{\partial T_1}$$

$$j = 1, 2$$

پارامترهای γ_1 و γ_2 در رابطه (۲۳-ب)، تغییر متغیرهایی هستند که سبب حذف صریح مقیاس‌های زمانی از عبارت‌های سکولار شده و به عبارت دیگر سبب خودگردان^۱ شدن سیستم می‌شوند [۳۴]. رابطه (۲۳-ج) مشتق زمانی پارامترهای β_1 ، β_2 ، a و b نسبت به مقیاس زمانی T_1 را نشان می‌دهد.

گام بعدی در روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، استخراج پاسخ پایایی^۲ سیستم است. در حالت پایا، تمامی مشتق‌های زمانی متغیرهای وابسته به زمان (در این جا a ، b ، γ_1 و γ_2 هستند)، برابر با صفر قرار داده می‌شوند. بنابراین، از رابطه

¹Autonomous

²Steady-state solution

(۲۴-۳) برای استخراج پاسخ پایا استفاده می‌گردد.

$$\begin{aligned}\frac{\partial a(T_1, T_2, \dots)}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial a}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial a}{\partial T_2} + \dots = 0 \\ \frac{\partial b(T_1, T_2, \dots)}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial b}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial b}{\partial T_2} + \dots = 0 \\ \frac{\partial \gamma_1(T_1, T_2, \dots)}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial \gamma_1}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial T_2} + \dots = 0 \\ \frac{\partial \gamma_2(T_1, T_2, \dots)}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} + \dots = 0\end{aligned}\tag{۲۴-۳}$$

با توجه به روابط (۱۸-۳) و (۲۳-۳ب)، پارامترهای a ، b ، γ_1 و γ_2 فقط تابع مقیاس زمانی T_1 هستند. با جایگذاری روابط (۲۳-۳ب) و (۲۳-۳ج) در رابطه (۲۴-۳)، رابطه (۲۵-۳) به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= a_1 = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= b_1 = 0 \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} &= \sigma_1 + \beta_{21} - 2\beta_{11} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} &= \sigma_2 - \beta_{11} = 0\end{aligned}\tag{۲۵-۳}$$

با انجام ساده‌سازی در رابطه (۲۵-۳)، رابطه (۲۶-۳) قابل استخراج است.

$$\begin{aligned}a_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ \beta_{11} &= \sigma_2 \\ \beta_{21} &= 2\sigma_2 - \sigma_1\end{aligned}\tag{۲۶-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۲۶-۳) در دو عبارت اول سکولار (یعنی در روابط (۱۹-۳) و (۲۰-۳)) و استخراج پارامترهای $\sin(\gamma_1)$ و $\cos(\gamma_1)$ از آنها، رابطه (۲۷-۳) به دست می‌آید.

$$\sin(\gamma_1) = \frac{-\tilde{c}_1 b + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_2 b}{\frac{1}{4} q_8 a^2}$$

$$\cos(\gamma_1) = \frac{\omega_2 b (2\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{3}{8} q_{14} b^3 - \frac{1}{4} q_{12} a^2 b + \tilde{c}_2 b}{\frac{1}{4} q_8 a^2} \quad (27-3)$$

به طور مشابه، پارامترهای $\sin(\gamma_2)$ و $\cos(\gamma_2)$ بر حسب متغیرهای a و b از جایگذاری روابط (۲۶-۳) و (۲۷-۳) در روابط (۲۱-۳) و (۲۲-۳) به دست می‌آیند:

$$\sin(\gamma_2) = \frac{\frac{3}{8} q_4 a^3 + \frac{1}{4} q_6 a b^2 - \omega_1 a \beta_{11} + \frac{q_2 a b \cos(\gamma_1)}{4} - \tilde{c}_3 a}{\frac{F_1}{2}} \quad (28-3)$$

$$\cos(\gamma_2) = \frac{\frac{\alpha_1 \omega_1 a}{2} + \frac{q_2 a b \sin(\gamma_1)}{4} - \tilde{c}_4 a}{\frac{-F_1}{2}}$$

سرانجام دو معادله پاسخ فرکانسی^۱ که بر حسب متغیرهای مجهول^۲ a و b هستند، از روابط (۲۹-۳ الف)-(۲۹-۳ ب) به دست می‌آیند. دو رابطه (۲۹-۳ الف) و (۲۹-۳ ب)، یک تابع غیرخطی از متغیرهای a و b هستند و با حل این دو رابطه به وسیله تابع Fsolve در نرم‌افزار متلب^۳، مقادیر دو مجهول آنها یعنی a و b تعیین خواهند شد.

$$\sin^2(\gamma_1) + \cos^2(\gamma_1) = 1 \quad (29-3 الف)$$

$$\sin^2(\gamma_2) + \cos^2(\gamma_2) = 1 \quad (29-3 ب)$$

بعد از این که مقادیر a و b با حل معادلات پاسخ فرکانسی به دست آمدند، رابطه (۳۰-۳) با استفاده از روابط (۱۸-۳)، (۱۳-۳) و (۹-۳) قابل استخراج است که تا تقریب مرتبه اول نوشته شده است.

$$x(t) = a \cos(\Omega t - \gamma_2) + O(\varepsilon)$$

$$y(t) = b \cos(2\Omega t + \gamma_1 - 2\gamma_2) + O(\varepsilon)$$

¹Frequency response equation

²Unknown parameters

³Matlab software

$$v(t) = \frac{\tilde{\theta}_3 \omega_1}{\sqrt{\frac{1}{R_l^2} + c_p^2 \omega_1^2}} a \cos \left(\Omega t - \gamma_2 + \frac{1}{\omega_1 R_l c_p} \right) + \frac{\tilde{\theta}_4 \omega_2}{\sqrt{\frac{1}{R_l^2} + c_p^2 \omega_2^2}} b \cos \left(2\Omega t + \gamma_1 - 2\gamma_2 + \frac{1}{\omega_2 R_l c_p} \right) + O(\varepsilon) \quad (30-3)$$

اگر از روابط (30-3)، (3-5)، (3-2) و (2-26) به ترتیب استفاده شود، رابطه (31-3) نتیجه خواهد شد.

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= W_1(x) \left(a_0 + v_{m1} a \cos(\Omega T_0 - \gamma_2) + v_{m2} b \cos(2\Omega T_0 + \gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \\ w_2(x, t) &= W_2(x) \left(b_0 + v_{m3} a \cos(\Omega T_0 - \gamma_2) + v_{m4} b \cos(2\Omega T_0 + \gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \\ w_{p2}(x, t) &= W_{p2}(x) \left(b_0 + v_{m3} a \cos(\Omega T_0 - \gamma_2) + v_{m4} b \cos(2\Omega T_0 + \gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \end{aligned} \quad (31-3)$$

رابطه (31-3) بیان گر پاسخ ارتعاشی هر نقطه از سیستم مورد بررسی است. همان طور که در این رابطه مشاهده می شود، زمانی که تشدیدهای اولیه و داخلی همزمان در سیستم رخ می دهند، فرکانس تحریک سیستم (Ω) به همراه دو برابر آن (2Ω)، در پاسخ سیستم ظاهر خواهند شد.

۳-۱-۲ راه حل مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری ۲

در این قسمت، عملیات مقیاس گذاری رابطه (3-6) به طرز متفاوتی نسبت به رابطه (3-7) که در بخش 3-1-1 بررسی شد، انجام شده که در رابطه (3-32) ارائه شده است. عملیات مقیاس گذاری انجام شده در رابطه (3-32)، در این پژوهش پیشنهاد شده که در آن پارامتر ε^1 در عبارتهای غیرخطی مرتبه دوم ضرب شده و همچنین، پارامتر ε^2 در عبارتهای میرایی، ولتاژ تولیدی، غیرخطی مرتبه سوم و نیرو ضرب می شود. قسمتی از فرآیند حل در این بخش مشابه بخش (3-1-1) است، بنابراین در این جا فقط به تفاوتها اشاره خواهد شد.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \varepsilon^2 \alpha_1 \dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) + \varepsilon \left(q_1 x^2(t) + q_2 x(t)y(t) + q_3 y^2(t) \right) + \varepsilon^2 \left(q_4 x^3(t) \right. \\ \left. + q_5 x^2(t)y(t) + q_6 x(t)y^2(t) + q_7 y^3(t) \right) + \varepsilon^2 \tilde{\theta}_1 v(t) = \varepsilon^2 \tilde{f}_1 = \varepsilon^2 F_1 \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

$$\ddot{y}(t) + \varepsilon^2 \alpha_2 \dot{y}(t) + \omega_2^2 y(t) + \varepsilon \left(q_8 x^2(t) + q_9 x(t)y(t) + q_{10} y^2(t) \right) + \varepsilon^2 \left(q_{11} x^3(t) + q_{12} x^2(t)y(t) + q_{13} x(t)y^2(t) + q_{14} y^3(t) \right) + \varepsilon^2 \tilde{\theta}_2 v(t) = \varepsilon^2 \tilde{f}_2 = \varepsilon^2 F_2 \sin(\Omega t)$$

$$c_p \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{R_l} + \tilde{\theta}_3 \dot{x}(t) + \tilde{\theta}_4 \dot{y}(t) = 0 \quad (32-3)$$

به دلیل این که بزرگترین توان پارامتر ε در رابطه (۳۲-۳) برابر با دو است، در حل از مقیاس‌های زمانی T_0 ، T_1 و T_2 استفاده می‌شود. با جایگذاری روابط (۹-۳) و (۱۰-۳) در رابطه (۳۲-۳)، روابط (۳۳-۳) تا (۳۵-۳) نتیجه خواهد شد که به ترتیب از برابر صفر قرار دادن ضرایب پارامترهای ε^0 ، ε^1 و ε^2 به دست آمده‌اند.

$$D_0^2 x_0 + \omega_1^2 x_0 = 0$$

$$D_0^2 y_0 + \omega_2^2 y_0 = 0 \quad (33-3)$$

$$c_p D_0 v_0 + \frac{v_0}{R_l} + \tilde{\theta}_3 D_0 x_0 + \tilde{\theta}_4 D_0 y_0 = 0$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 + 2D_0 D_1 x_0 + q_1 x_0^2 + q_2 x_0 y_0 + q_3 y_0^2 = 0 \quad (34-3)$$

$$D_0^2 y_1 + \omega_2^2 y_1 + 2D_0 D_1 y_0 + q_8 x_0^2 + q_9 x_0 y_0 + q_{10} y_0^2 = 0$$

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 + q_4 x_0^3 + q_5 x_0^2 y_0 + q_6 x_0 y_0^2 + q_7 y_0^3 + 2x_1 D_0 D_1 + 2x_0 D_0 D_2 + \alpha_1 D_0 x_0 + D_1^2 x_0 + 2q_1 x_0 x_1 + q_2 x_1 y_0 + q_2 x_0 y_1 + 2q_3 y_0 y_1 - F_1 \sin(\Omega t) + \tilde{\theta}_1 v_0 = 0$$

$$D_0^2 y_2 + \omega_2^2 y_2 + q_{11} x_0^3 + q_{12} x_0^2 y_0 + q_{13} x_0 y_0^2 + q_{14} y_0^3 + 2D_0 D_1 y_1 + 2D_0 D_2 y_0 + \alpha_2 D_0 y_0 + D_1^2 y_0 + 2q_8 x_0 x_1 + q_9 x_1 y_0 + q_9 x_0 y_1 + 2q_{10} y_0 y_1 - F_2 \sin(\Omega t) + \tilde{\theta}_2 v_0 = 0 \quad (35-3)$$

پاسخ معادلات دیفرانسیل حاضر در رابطه (۳۳-۳)، در رابطه (۳۶-۳) ارائه شده که مشابه پاسخ رابطه (۱۱-۳) است ولی در این جا پارامترهای A و B همزمان تابعی از مقیاس‌های زمانی T_1 و T_2 هستند.

$$x_0(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_1 T_0}$$

$$y_0(T_0, T_1, T_2) = B(T_1, T_2) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{B}(T_1, T_2) e^{-i\omega_2 T_0}$$

$$v_0(T_0, T_1, T_2) = -\tilde{\theta}_3 \left(\frac{i\omega_1 e^{i\omega_1 T_0}}{ic_p \omega_1 + \frac{1}{R_l}} A(T_1, T_2) - \frac{i\omega_1 e^{-i\omega_1 T_0}}{-ic_p \omega_1 + \frac{1}{R_l}} \bar{A}(T_1, T_2) \right)$$

$$-\tilde{\theta}_4 \left(\frac{i\omega_2 e^{i\omega_2 T_0}}{ic_p \omega_2 + \frac{1}{R_l}} B(T_1, T_2) - \frac{i\omega_2 e^{-i\omega_2 T_0}}{-ic_p \omega_2 + \frac{1}{R_l}} \bar{B}(T_1, T_2) \right) \quad (36-3)$$

فرم قطبی پارامترهای A و B در رابطه (37-3) داده شده است.

$$A(T_1, T_2) = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) e^{i\beta_1(T_1, T_2)} \quad (37-3)$$

$$B(T_1, T_2) = \frac{1}{2} b(T_1, T_2) e^{i\beta_2(T_1, T_2)}$$

که a و b دارای مقدار مثبت و حقیقی هستند. با در نظر گرفتن تشدیدهای اولیه و داخلی در سیستم، رابطه (38-3) نتیجه می‌شود.

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1 \quad (38-3)$$

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2$$

با جایگذاری رابطه (36-3) در روابط (34-3) و (35-3)، می‌توان عبارتهای سکولار را استخراج کرد که چهار عبارت سکولار مختلط نتیجه می‌دهد. با استفاده از رابطه (37-3) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی در چهار عبارت سکولار مختلط نتیجه شده، هشت عبارت سکولار حقیقی به دست خواهد آمد:

$$-\omega_1 a \beta_{11} + \frac{1}{4} q_2 ab \cos(\gamma_1) = 0 \quad (39-3)$$

$$\omega_1 a + \frac{1}{4} q_2 ab \sin(\gamma_1) = 0 \quad (40-3)$$

$$-\omega_2 b \beta_{21} + \frac{1}{4} q_8 a^2 \cos(\gamma_1) = 0 \quad (41-3)$$

$$\omega_2 b - \frac{1}{4} q_8 a^2 \sin(\gamma_1) = 0 \quad (42-3)$$

$$-\omega_1 a \beta_{12} - \tilde{c}_3 a - \frac{1}{2} F_1 \sin(\gamma_2) + \frac{1}{8} a^3 r_1 + \frac{1}{8} ab^2 r_2 + \frac{a11}{2} - \frac{1}{2} a \beta_{11}^2 = 0 \quad (43-3)$$

$$\omega_1 a_2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \omega_1 a - \tilde{c}_4 a + \frac{1}{2} F_1 \cos(\gamma_2) + a_1 \beta_{11} + \frac{1}{2} a \beta_{111} = 0 \quad (۴۴-۳)$$

$$\frac{1}{8} a^2 b r_4 + \frac{1}{8} b^3 r_3 - \tilde{c}_2 b - \omega_2 b \beta_{22} + \frac{b_{11}}{2} - \frac{1}{2} b \beta_{21}^2 = 0 \quad (۴۵-۳)$$

$$\omega_2 b_2 - \tilde{c}_1 b + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_2 b + b_1 \beta_{21} + \frac{1}{2} b \beta_{211} = 0 \quad (۴۶-۳)$$

پارامترهای به کار رفته در هشت عبارت سکولار بالا که قبلا تعریف نشده‌اند، در روابط (۳-۴۷الف)-(۳-۴۷ج) ارائه شده‌اند.

$$r_1 = 3q_4 - \frac{2q_2 q_8}{\omega_2^2} - \frac{10q_1^2}{3\omega_1^2}$$

$$r_2 = \frac{q_2^2}{2\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} - \frac{2q_2 q_{10}}{\omega_2^2} + \frac{2q_3 q_9}{\omega_1^2 + 2\omega_1 \omega_2} + \frac{2q_3 q_9}{\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_2} - \frac{4q_1 q_3}{\omega_1^2} + 2q_6 \quad (۳-۴۷الف)$$

$$r_3 = 3q_{14} - \frac{10q_{10}^2}{3\omega_2^2} + \frac{q_3 q_9}{-\omega_1^2 + 4\omega_2^2} - \frac{2q_3 q_9}{\omega_1^2}$$

$$r_4 = \frac{2q_2 q_8}{2\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2} - \frac{2q_9 q_1}{\omega_1^2} - \frac{4q_{10} q_8}{\omega_2^2} + \frac{q_9^2}{\omega_1^2 + 2\omega_1 \omega_2} + \frac{q_9^2}{\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_2} + 2q_{12}$$

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_2 + \beta_2 - 2\beta_1 \quad (۳-۴۷ب)$$

$$\gamma_2 = \sigma_2 T_2 - \beta_1$$

$$a_i = \frac{\partial a}{\partial T_i}$$

$$b_i = \frac{\partial b}{\partial T_i}$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2}$$

$$b_{11} = \frac{\partial^2 b}{\partial T_1^2} \quad (۳-۴۷ج)$$

$$\beta_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial T_j}$$

$$\beta_{i11} = \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial T_1^2}$$

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2$$

رابطه (۳-۴۷ب) نشان‌دهنده تغییر متغیرهایی است که برای خودگردان شدن عبارت‌های سکولار تعریف شده‌اند (یعنی مقیاس‌های زمانی به طور صریح در آن‌ها مشاهده نشوند). رابطه (۳-۴۷ج) نیز مشتق‌های متغیرهای زمانی نسبت به مقیاس‌های زمانی را نشان می‌دهد. از رابطه (۳-۲۴) برای استخراج پاسخ پایای سیستم استفاده می‌شود که ساده شده آن در رابطه (۳-۴۸) ارائه شده است.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a_1 + a_2 = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = b_1 + b_2 = 0$$

(۳-۴۸)

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \beta_{21} - 2\beta_{11} + \sigma_1 + \beta_{22} - 2\beta_{12} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = -\beta_{11} + \sigma_2 - \beta_{12} = 0$$

با انجام ساده‌سازی در رابطه (۳-۴۸)، روابط (۳-۴۹الف)-(۳-۴۹د) نتیجه خواهند شد.

$$a_1 + a_2 = 0 \quad (۳-۴۹الف)$$

$$b_1 + b_2 = 0 \quad (۳-۴۹ب)$$

$$\beta_{12} = \sigma_2 - \beta_{11} \quad (۳-۴۹ج)$$

$$\beta_{22} = -\beta_{21} + 2\sigma_2 - \sigma_1 \quad (۳-۴۹د)$$

روند محاسبه دامنه‌های پایای a و b ، به شرح زیر است:

۱. با حذف عبارت‌های $\sin(\gamma_1)$ و $\cos(\gamma_1)$ از روابط (۳-۳۹) تا (۳-۴۲)، پارامترهای b_1 و β_{21} استخراج می‌شوند:

$$b_1 = \left(\frac{-\omega_1 a}{2b\omega_2} \right) a_1 \quad (۳-۵۰الف)$$

$$\beta_{21} = \left(\frac{\omega_1 a^2}{2\omega_2 b^2} \right) \beta_{11} \quad (۳-۵۰ب)$$

۲. با مشتق‌گیری زمانی از روابط (۳-۳۹) تا (۳-۴۲) نسبت به مقیاس زمانی T_1 و با انجام محاسبات ریاضی، روابط (۳-۵۱الف) تا (۳-۵۱د) استخراج خواهند شد.

$$\beta_{111} = \frac{-2a_1\beta_{11}}{a} \quad (۳-۵۱الف)$$

$$a_{11} = \left(\frac{1}{a} - \frac{\omega_1 a}{2\omega_2 b^2} \right) a_{11}^2 + \left(2a - \frac{\omega_1 a^3}{2b^2 \omega_2} \right) \beta_{11}^2 \quad (۵۱-۳)$$

$$\beta_{211} = \frac{\omega_1^2 a^3 a_{11} \beta_{11}}{2\omega_2^2 b^4} \quad (۵۱-۳)$$

$$b_{11} = \left(\frac{a^4 \omega_1^2}{4\omega_2^2 b^3} - \frac{a^2 \omega_1}{\omega_2 b} \right) \beta_{11}^2 - \frac{\omega_1 a_{11}^2}{\omega_2 b} \quad (۵۱-۳)$$

۳. با استفاده از روابط (۳-۵۰الف) تا (۳-۵۱د)، رابطه (۳-۵۲) برقرار است.

$$b_1 \beta_{21} + \frac{1}{2} b \beta_{211} = 0 \quad (۵۲-۳)$$

$$a_{11} \beta_{11} + \frac{1}{2} a \beta_{111} = 0$$

۴. با استفاده از رابطه (۳-۵۲)، پارامتر b_2 از رابطه (۳-۴۶) استخراج می‌شود:

$$b_2 = \frac{\tilde{c}_1 b - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_2 b}{\omega_2} \quad (۵۳-۳)$$

بر اساس تعریف پارامتر \tilde{c}_1 که در رابطه (۳-۲۳الف) انجام شده، \tilde{c}_1 عددی حقیقی و منفی است. همچنین، سایر پارامترهایی که در طرف راست رابطه (۳-۵۳) قرار گرفته‌اند، مقداری مثبت دارند. بنابراین در مجموع b_2 مقداری منفی خواهد داشت. با توجه به رابطه (۳-۴۹ب) و منفی بودن مقدار b_1 ، b_2 مثبت خواهد شد. با در نظر گرفتن مقدار مثبت برای b_1 و استفاده به ترتیب از روابط (۳-۵۰الف) و (۳-۴۹الف)، a_1 و a_2 به ترتیب مقدارهای منفی و مثبت خواهند داشت.

۵. با حذف $\sin(\gamma_1)$ و $\cos(\gamma_1)$ از روابط (۳-۳۹) و (۳-۴۰) و با توجه به این که a_1 دارای مقدار منفی است، رابطه (۳-۵۴) نتیجه خواهد شد.

$$a_1 = -a \sqrt{\frac{b^2 q_2^2}{16\omega_1^2} - \beta_{11}^2} \quad (۵۴-۳)$$

۶. با در نظر گرفتن روابط (۳-۵۰ب)، (۳-۴۹د) و (۳-۵۱د) و استفاده از آن‌ها در رابطه (۳-۴۵)، β_{11} بر حسب پارامترهای a و b به دست می‌آید:

$$\beta_{11} = \frac{- \left(\frac{a^2 b r_4 + b^3 r_3}{8} - \tilde{c}_2 b \right) \omega_1 \omega_2 q_2 b - (\sigma_1 - 2\sigma_2) b^2 q_2 \omega_2^2 \omega_1 + \left(\frac{a^2 b^2 q_2^2 q_8}{16} \right)}{a^2 \omega_1^2 \omega_2 q_8} \quad (۵۵-۳)$$

۷. با توجه به رابطه (۳-۵۵)، β_{11} فقط تابعی از متغیرهای مجهول a و b است. بنابراین با در نظر گرفتن به ترتیب روابط (۳-۴۹ج)، (۳-۵۰ب)، (۳-۴۹د)، (۳-۵۴)، (۳-۵۰الف) و (۳-۵۱الف)-(۳-۵۱د)، می توان گفت که تمامی پارامترهای سمت چپ آن روابط فقط تابعی از متغیرهای a و b هستند.

۸. از روابط (۳-۴۳) و (۳-۴۴) برای استخراج $\sin(\gamma_2)$ و $\cos(\gamma_2)$ استفاده می شود:

$$\text{Num1} = -\omega_1 a \beta_{12} - \tilde{c}_3 a + \frac{1}{8} a^3 r_1 + \frac{1}{8} a b^2 r_2 + \frac{a_{11}}{2} - \frac{1}{2} a \beta_{11}^2 \quad (۳-۵۶الف)$$

$$\text{Num2} = \frac{1}{2} \alpha_1 \omega_1 a - \tilde{c}_4 a$$

$$\sin(\gamma_2) = \frac{\text{Num1}}{\frac{1}{2} F_1} \quad (۳-۵۶ب)$$

$$\cos(\gamma_2) = \frac{\omega_1 a_2 + \text{Num2}}{-\frac{1}{2} F_1}$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin^2(\gamma_2) + \cos^2(\gamma_2) = 1$ ، برای استخراج a_2 استفاده می شود که ساده شده آن در رابطه (۳-۵۷) ارائه شده است. با توجه به رابطه (۳-۲۳الف)، \tilde{c}_4 مقدار منفی دارد. بنابراین مجموع ریشه ها در معادله درجه دوم (۳-۵۷) مقداری منفی خواهد داشت.

$$\left(4\omega_1^2\right) a_2^2 + \left(8\omega_1 \text{Num2}\right) a_2 + \left(-F_1^2 + 4\text{Num1}^2 + 4\text{Num2}^2\right) = 0 \quad (۳-۵۷)$$

همان طور که قبلا نتیجه گیری شد، a_2 مقدار مثبت دارد. بنابراین فقط ریشه مثبت معادله (۳-۵۷) قابل قبول است که در رابطه (۳-۵۸) محاسبه شده است. ریشه دیگر آن حتما مقدار منفی دارد چون مجموع ریشه ها منفی هستند.

$$a_2 = \frac{-8\omega_1 \text{Num2} + \sqrt{\left(8\omega_1 \text{Num2}\right)^2 - 4\left(4\omega_1^2\right)\left(-F_1^2 + 4\text{Num1}^2 + 4\text{Num2}^2\right)}}{8\omega_1^2} \quad (۳-۵۸)$$

۹. همان طور که اشاره گردید، پارامترهای سمت چپ روابط (۳-۵۰الف)، (۳-۵۳)، (۳-۵۴) و (۳-۵۸) یعنی a_1 ، a_2 و b_1 و b_2 فقط تابع دامنه های پایای a و b هستند. بنابراین از حل عددی روابط (۳-۴۹الف) و (۳-۴۹ب) می توان پارامترهای مجهول a و b را استخراج کرد.

با محاسبه شدن مقادیر پایای a و b ، مقادیر $x(t)$ ، $y(t)$ و $v(t)$ با تقریب مرتبه اول از رابطه (۳-۳۰) استخراج شده و پاسخ ارتعاشی سیستم پیشنهادی نیز از رابطه (۳-۳۱) به دست می آید.

بنابراین تفاوت بین راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در عملیات مقیاس گذاری

آن‌ها است که منجر به متفاوت شدن روند استخراج دامنه‌های پایای a و b می‌شود. دامنه پایای هر نقطه از سیستم تیر دوگانه گیردار در فرکانس تحریک و دو برابر آن، در رابطه (۳-۳۱) قابل مشاهده است که تابع پارامترهای a و b است.

۲-۳ جمع‌بندی

در این فصل معادلات حرکت به دست آمده در فصل ۲، به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل شدند. ابتدا همانند سایر پژوهش‌ها، عملیات مقیاس‌گذاری انجام شد و معادلات حرکت با روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل شدند که تحت عنوان "راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس عملیات مقیاس‌گذاری ۱" در بخش ۳-۱-۱ بررسی شد. در ادامه، عملیات مقیاس‌گذاری جدیدی ارائه گردید که سبب افزایش دقت حل در روش مقیاس‌های زمانی چندگانه در سیستم‌های دو درجه آزادی دارای ضرایب غیرخطی مرتبه دوم و سوم می‌شود که در بخش ۳-۱-۲ تحت عنوان "راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲" ارائه شد. عملیات مقیاس‌گذاری انجام شده در راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ به طور دقیق‌تری نسبت به راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ انجام شده که سبب می‌شود دقت حل در راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ نسبت به راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ افزایش یابد.

فصل چهارم

معرفی ابزار تجربی پژوهش

در این فصل به معرفی ابزار تجربی پژوهش پرداخته می‌شود که برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از مدل‌سازی انجام شده در فصل ۲، به کار می‌رود. پس از معرفی سیستم تجربی تیر دوگانه گیردار و مشخصات آن، روند انجام آزمایش شرح داده می‌شود.

۴-۱ معرفی سیستم تجربی تیر دوگانه گیردار

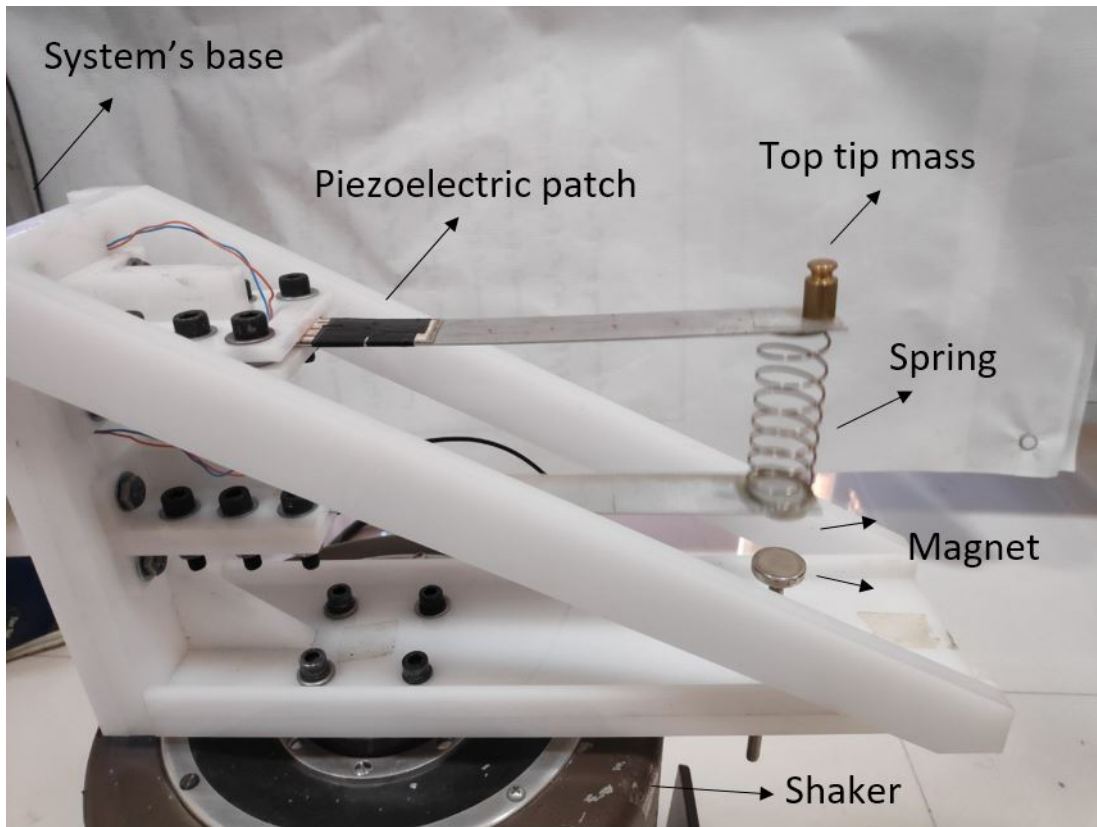
از آزمایش تجربی برای اعتبار سنجی نتایج نظری استفاده می‌شود. در شکل ۴-۱، وسیله آزمایشگاهی ساخته شده، ارائه شده است. برای تحریک خارجی سیستم تیر دوگانه گیردار از نوع شتاب پایه و اعمال شرایط تکیه‌گاهی گیردار و هم‌چنین اتصال سیستم به لرزاننده^۱، لازم است که پایه‌ای برای سیستم طراحی گردد. این طراحی به وسیله نرم‌افزار کتیا^۲ انجام شده که نتیجه آن در شکل ۴-۲ نمایش داده شده است. پایه سیستم از جنس شیشه پلکسی^۳ ساخته شده و طراحی ساختار آن به گونه‌ای انجام شده است که تا حد امکان در برابر سیستم تیر دوگانه گیردار صلب^۴ باشد.

¹Shaker

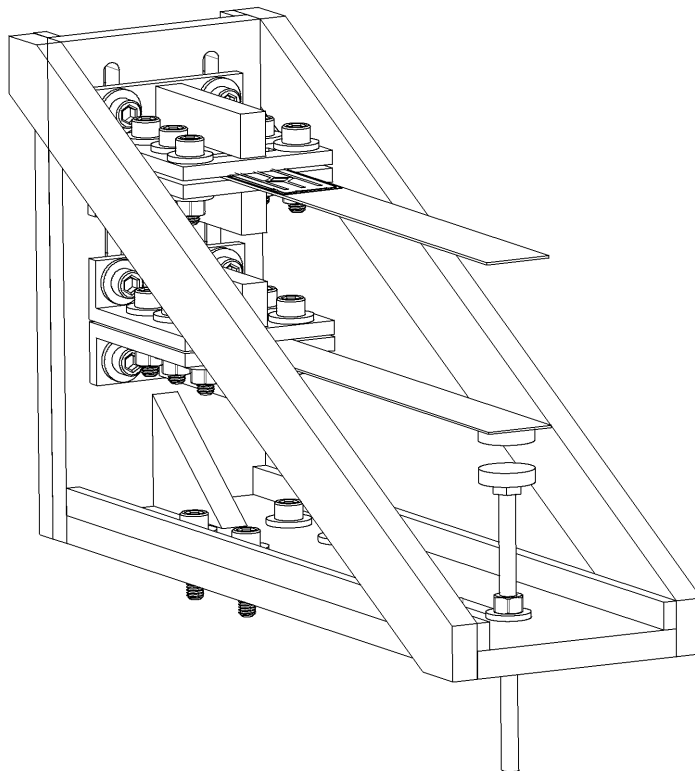
²Catia software

³Plexiglass

⁴Rigid



شکل ۴-۱- وسیله آزمایشگاهی ساخته شده.



شکل ۴-۲- شماتیک پایه سیستم طراحی شده.

تیرهای بالا و پایین در انتهای سمت چپ خود به وسیله نبشی‌هایی به پایه سیستم پیچ شده تا شرط مرزی گیردار برای تیرها^۱ ایجاد شود. جرم‌هایی در انتهای سمت راست تیرها نصب شده که جرم متصل شده به تیر پایینی یک آهنربا از جنس نئودیوم^۲ است (آهنربای اول). آهنربای دیگری (آهنربای دوم) برای ایجاد نیروی غیرخطی بین دو آهنربا، بر پایه سیستم قرار گرفته است. فاصله بین آهنربای اول و دوم در حالتی که سیستم خاموش است (در حالت تعادل استاتیکی سیستم)، قابل تنظیم است تا بتوان نیروی آهنربا را تغییر داد. بدین منظور، آهنربای دوم به جای این که مستقیماً بر پایه سیستم نصب شود، بر روی قسمت مسطح یک پیچ قرار گرفته که پیچ با دو مهره به پایه سیستم متصل می‌شود. بنابراین، فاصله میان دو آهنربا با تنظیم کردن پیچ به وسیله دو مهره، قابل تغییر است. ماده سازنده فنر خطی و پیچ استفاده شده برای نصب آهنربای دوم، از جنس فولاد ضد زنگ^۳ با خاصیت مغناطیسی ضعیف انتخاب شده تا بر میدان مغناطیسی تولیدی توسط دو آهنربا، تاثیری نداشته باشند. فنر نیز در انتهای سمت راست تیرهای پایین و بالا به تیرها متصل شده است. جنس تیرهای بالا و پایین از آلومینیوم انتخاب شده تا بر میدان مغناطیسی تاثیری نداشته باشد. مشخصات تیرهای بالا و پایین، جرم‌های انتهایی و فنر در جدول ۱-۴ داده شده است. وصله‌های پیزوالکتریک محصول شرکت مایدهستند [۲۹]. آن‌ها به وسیله چسب‌های دو طرفه به هر دو سطح بالا و پایینی تیر بالا متصل شده‌اند. وصله پیزوالکتریک از زیر لایه‌های مختلفی تشکیل شده که در شکل ۱-۲-ب نمایش داده شده است. در سرتاسر این پژوهش، زیر لایه‌های PZT-5J از وصله‌های پیزوالکتریک به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند. مشخصات لایه چسب دو طرفه و وصله پیزوالکتریک به ترتیب در جدول‌های ۱-پ و ۲-پ و ۲-پ در پیوست ۲-ارائه شده است [۲۹، ۳۷].

نیروی مغناطیسی میان دو آهنربا بر حسب فاصله بین آن دو به صورت تجربی به وسیله دستگاه تست کشش^۴ اندازه‌گیری شده و رابطه (۱۲-۲) بر آن برازش^۵ می‌شود. نیروی مغناطیسی اندازه‌گیری شده به همراه مقدار برازش شده آن در شکل ۳-۴ ارائه شده است که نشان می‌دهد رابطه برازش شده (۱۲-۲) دقت بالایی دارد. با توجه به شکل ۳-۴، ضرایب رابطه (۱۲-۲) مشخص می‌گردند:

$$\begin{aligned} a_m &= 11.1 & b_m &= -305.1 \\ c_m &= 8.148 & d_m &= -121.4 \end{aligned} \quad (1-4)$$

¹Cantilever boundary conditions

²Neodymium

³Stainless steel

⁴Tensile test device

⁵Curve fit

جدول ۴-۱ - مشخصات تیرهای پایین و بالا، جرم‌های انتهایی و فنر.

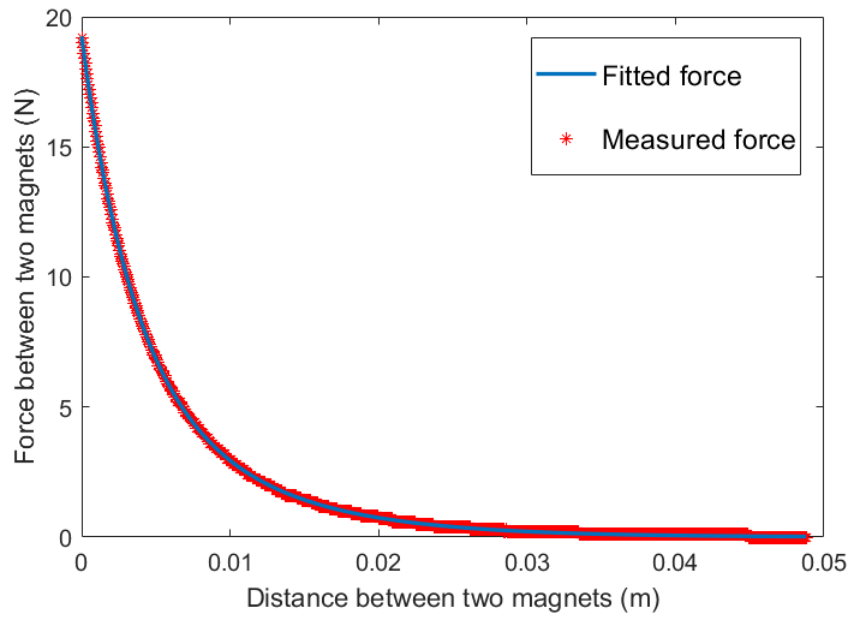
پارامتر	مقدار
طول تیرهای پایین و بالا (L)	۱۶۸ میلی‌متر
ضخامت تیر پایین (h_1)	۰/۷۸ میلی‌متر
ضخامت تیر بالا (h_2)	۰/۷۸ میلی‌متر
عرض تیر پایین (b_1)	۲۴/۴ میلی‌متر
عرض تیر بالا (b_2)	۲۴/۴ میلی‌متر
جنس تیرهای پایین و بالا	آلومینیوم
مدول الاستیک آلومینیوم	۶۸ گیگاپاسکال
چگالی آلومینیوم	۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب
مقدار جرم انتهایی پایین (M_{t1})	۱۲/۲ گرم
مقدار جرم انتهایی بالا (M_{t2})	۱۰ گرم
موقعیت مرکز جرم در جرم انتهایی پایین نسبت به طرف گیردار (x_{CG1})	۱۵۸ میلی‌متر
موقعیت مرکز جرم در جرم انتهایی بالا نسبت به طرف گیردار (x_{CG2})	۱۶۳ میلی‌متر
ثابت فنر (k)	۱۰۹ نیوتن بر متر
جرم فنر (M_s)	۴/۵ گرم
موقعیت مرکز تقارن فنر روی تیر پایین یا بالا نسبت به طرف گیردار (x_{cs1} یا x_{cs2})	۱۵۶/۵ میلی‌متر

۴-۲ روند انجام آزمایش تجربی

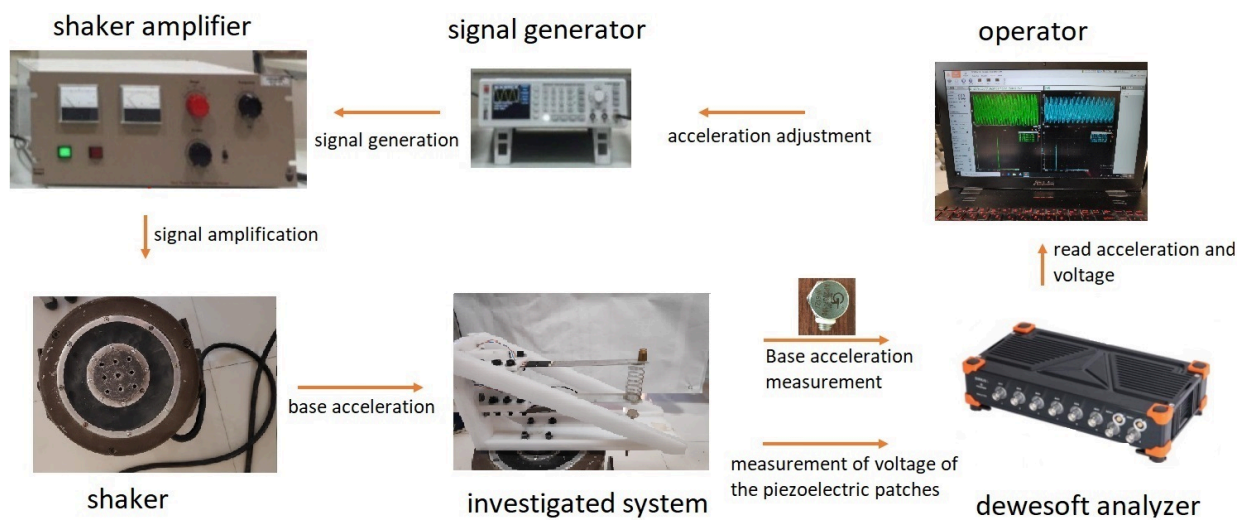
در این قسمت، روند انجام آزمایش تجربی شرح داده می‌شود. نمای کلی سیستم اندازه‌گیری در شکل ۴-۴ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۴-۴، برای استخراج پاسخ فرکانسی سیستم تیر دوگانه گیردار یعنی ولتاژ تولیدی بر حسب فرکانس تحریک، پایه سیستم به لرزاننده پیچ شده و تحت شتاب ثابت در شرایط اولیه صفر^۱ قرار می‌گیرد. مقدار فرکانس تحریک و دامنه شتاب اعمالی به وسیله دستگاه تولیدکننده سیگنال^۲ تنظیم شده و به لرزاننده اعمال می‌شود.

^۱Zero initial conditions

^۲Signal generator



شکل ۴-۳- نمودار نیروی مغناطیسی اندازه گیری شده بر حسب فاصله میان دو آهنربا به همراه مقدار برآزش شده آن.



شکل ۴-۴- نمای کلی سیستم اندازه گیری تجربی.

برای اندازه‌گیری شتاب پایه، از شتاب سنج قرار داده شده بر پایه سیستم استفاده شده و مقدار آن توسط تحلیل‌گر دوسافت^۱ اندازه‌گیری شده و با رایانه خوانده می‌شود. ولتاژ تولیدی در زیر لایه‌های PZT-5J از وصله‌های پیزوالکتریک که به صورت سری توسط مقاومت الکتریکی R_l به یکدیگر متصل می‌شوند، توسط تحلیل‌گر دوسافت اندازه‌گیری می‌شود. در حالت مدار باز^۲، مقاومت دستگاه اندازه‌گیری دوسافت برابر با ده مگا اهم است که در نتایج از عبارت "مقاومت بی‌نهایت" برای اشاره به آن استفاده می‌شود.

آزمایش تجربی در دو حالت عدم وجود و وجود آهنربای دوم انجام می‌شود. در حالت عدم وجود آهنربای دوم، آهنربای نصب شده بر پایه سیستم حذف می‌گردد. در این حالت سیستم رفتار خطی از خود نشان می‌دهد. در حالت وجود آهنربای دوم، آهنربای نصب شده بر پایه سیستم، در فاصله مشخصی از آهنربای اول قرار داده شده تا سیستم غیرخطی گردد. در این حالت، پارامترهای سیستم به گونه‌ای طراحی شده‌اند تا تشدید داخلی نیز در سیستم رخ دهد. در حالت عدم وجود آهنربای دوم، ابتدا تست مودال^۳ انجام می‌شود تا حدودی از فرکانس‌های طبیعی سیستم به همراه نسبت‌های میرایی آن به دست آیند. سپس در اطراف فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از این روش، سیستم به وسیله لرزاننده تحریک شده و پاسخ فرکانسی آن رسم می‌شود. در این حالت، فرکانس‌های متناظر با ولتاژ بیشینه، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم هستند. برای یافتن نسبت‌های میرایی، سیستم در فرکانس‌های طبیعی اول و دوم به دست آمده، در شتاب پایه‌های مختلف تحریک شده و پس از مدت زمان اندکی، تحریک خارجی آن قطع می‌شود تا سیستم وارد ارتعاشات آزاد گردد. در این حالت پاسخ زمانی ولتاژ، اندازه‌گیری شده و با عبور آن از فیلتر میان‌گذر^۴ حول هریک از فرکانس‌های طبیعی و استفاده از روش کاهش لگاریتمی^۵، نسبت‌های میرایی مودهای اول و دوم محاسبه می‌شوند. نتایج حاصل از تست مودال و تحریک هارمونیک به وسیله لرزاننده^۶ در حالت مدار باز، در جدول ۴-۲ ارائه شده است. همان‌طور که اشاره شد، در حالت مدار باز، مقدار مقاومت دستگاه اندازه‌گیری ده مگا اهم است. هم‌چنین اثر مقدار مقاومت الکتریکی نیز در فصل ۵ بررسی می‌شود.

در حالت وجود آهنربای دوم، تحریک در فرکانس‌های نزدیک فرکانس طبیعی اول در شرایط اولیه صفر انجام شده و پاسخ فرکانسی استخراج می‌گردد. همان‌طور که در فصل ۳ اشاره شد، سیستم پیشنهادی به گونه‌ای طراحی شده است که در حالت وجود آهنربای دوم، تشدید داخلی رخ دهد. در تحریک هارمونیک سیستم در حالت تشدید داخلی، ولتاژ تولیدی در فرکانس تحریک و دو برابر آن دارای مقدار است، بنابراین در رسم پاسخ فرکانسی از جذر میانگین مربعات^۷

¹Dewesoft analyzer

²Open circuit condition

³Modal testing

⁴Band-pass filter

⁵Logarithmic decrement

⁶Modal testing by harmonic excitation using a shaker

⁷Root mean square (RMS)

ولتاژ تولیدی (ولتاژ موثر) استفاده می‌شود. در حالت عدم وجود آهنربای دوم نیز از ولتاژ موثر استفاده می‌شود. نتایج تجربی در فصل ۵ ارائه می‌گردند.

جدول ۴-۲- فرکانس‌های طبیعی مدار باز و نسبت‌های میرایی اندازه‌گیری شده در حالت عدم وجود آهنربای دوم.

پارامتر	مقدار
فرکانس طبیعی اول (ω_1)	۹/۲۵ هرتز
فرکانس طبیعی دوم (ω_2)	۲۱ هرتز
نسبت میرایی مود اول (ζ_1)	۰/۰۲۱
نسبت میرایی مود دوم (ζ_2)	۰/۰۰۷۵

۳-۴ جمع‌بندی

در این فصل، ابزار تجربی پژوهش معرفی گردید که به منظور صحت‌سنجی مدل‌سازی ریاضی انجام شده، ساخته شده است. در ادامه روند انجام آزمایش شرح داده شد. آزمایش در دو حالت عدم وجود و وجود آهنربای نصب شده بر پایه سیستم انجام می‌شود. در انتهای فصل، فرکانس‌های طبیعی و نسبت‌های میرایی به دست آمده از آزمایش تجربی در حالت عدم وجود آهنربا ارائه شدند.

فصل پنجم

نتایج

در این فصل نتایج حاصل از این پژوهش ارائه می‌شوند. ابتدا مدل‌سازی اجزای محدود سیستم تیر دوگانه گیردار در نرم‌افزار آباکوس^۱ انجام می‌شود. سپس، اثر چسب دو طرفه در انتقال کرنش محوری از تیر بالا به وصله‌های پیزوالکتریک بررسی می‌گردد. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده و اندازه‌گیری شده و روش استخراج پاسخ فرکانسی سیستم، در ادامه ارائه می‌شوند. در پایان این فصل، نتایج تجربی آورده شده و بین آن‌ها و نتایج نظری، مقایسه انجام می‌شود. برای بررسی دقت روش حل تحلیلی تقریبی مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲، روابط (۲۸-الف)-(۲۸-ب) به روش عددی نیز حل می‌شوند که پاسخ ارتعاشی هر نقطه از سیستم از رابطه (۲۶-۲) محاسبه خواهد شد. حل عددی به کمک تابع ode-45 در نرم‌افزار متلب انجام می‌شود. در نمودارها، نتایج راه‌حل عددی مجموعه روابط (۲۸-الف)-(۲۸-ب) با نام‌گذاری حل عددی مدل غیرخطی^۲ نشان داده می‌شوند.

۵-۱ مدل اجزای محدود سیستم تیر دوگانه گیردار

در فصل ۲، مدل‌سازی ریاضی سیستم پیشنهادی انجام شد. سپس با استفاده از روش مودهای فرضی، معادلات حرکت گسسته شده سیستم یعنی روابط (۲۸-الف)-(۲۸-ب) استخراج شدند. در این روش، دقت مدل‌سازی به

^۱Abaqus software

^۲Nonlinear numerical model

شکل مودهایی که انتخاب می‌شوند، بستگی دارد. بنابراین، هر چه شکل موده‌های فرض شده به شکل موده‌های واقعی سیستم نزدیک‌تر باشند، دقت مدل‌سازی افزایش خواهد یافت. برای محاسبه دقیق‌ترین شکل مودهایی که شرایط مرزی اساسی و طبیعی^۱ را ارضا می‌کنند، از مدل‌سازی سیستم پیشنهادی در نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. بنابراین در این جا ایده اصلی این است که ابتدا مدل اجزای محدود سیستم تیر دو گانه گیردار در نرم‌افزار آباکوس ساخته شود، سپس فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های آن استخراج شوند و از آن شکل مودها، به عنوان موده‌های فرض شده در روش موده‌های فرضی استفاده گردد. شکل ۱-۵، مدل اجزای محدود انجام شده در نرم‌افزار آباکوس را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۵ - مدل‌سازی اجزای محدود انجام شده با توجه به شکل‌های ۱-۲، ۲-۲ و جدول‌های ۱-۴ و پ-۱ تا پ-۲.

تیرهای پایین و بالا، وصله‌های پیزوالکتریک و چسب‌های دو طرفه به صورت شکل‌های دو بعدی تغییر شکل پذیر^۲ رسم می‌شوند. برای مدل‌سازی آن‌ها به جز زیر لایه PZT-5J از وصله‌های پیزوالکتریک، از المان هشت گره‌ای تنش صفحه‌ای (CPS8) استفاده می‌شود. برای لایه PZT-5J نیز از المان هشت گره‌ای تنش صفحه‌ای پیزوالکتریک (CPS8E) استفاده می‌گردد. برای مدل‌سازی فنر، به دلیل این که علاوه بر سختی، جرم آن نیز باید در نظر گرفته شود، از المان خرپا (T2D2) به جای مدل‌سازی سختی فنر به تنهایی، استفاده می‌شود. سطح مقطع عرضی و مدول الاستیک خرپا به گونه‌ای طراحی می‌شوند که خرپا جرم و سختی برابر با فنر خطی ارائه شده در جدول ۱-۴ داشته باشد. جرم‌های انتهایی بالا و پایین به شکل جرم نقطه‌ای در موقعیت مرکز جرم‌شان مدل شده‌اند. تیرهای پایین و بالا در انتهای سمت چپ خود گیردار شده‌اند.

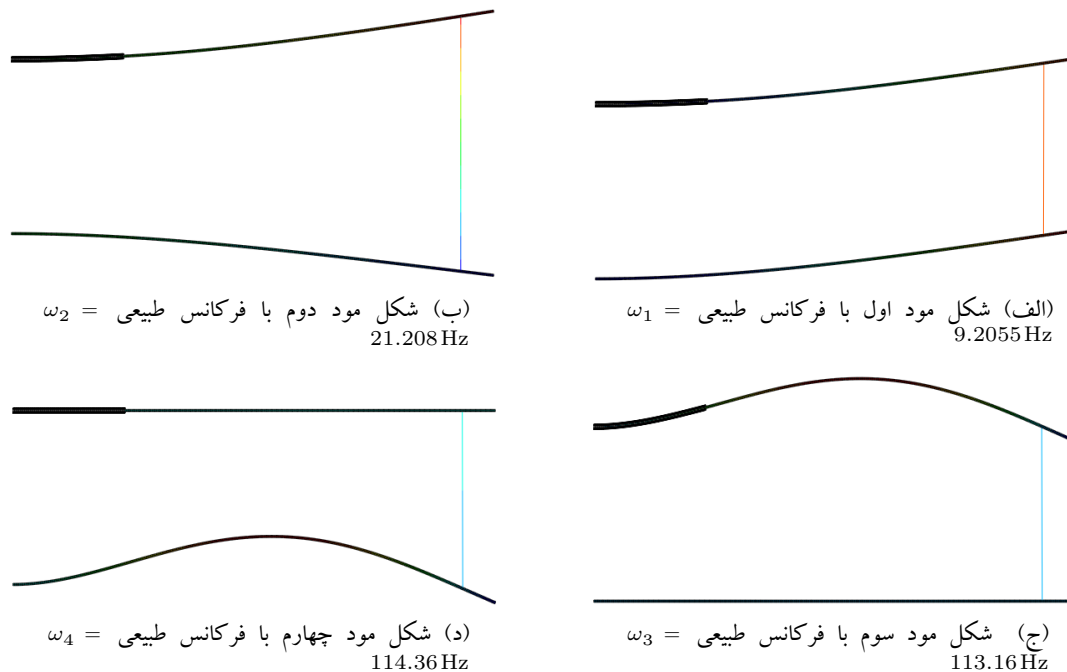
سرانجام، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها با استفاده از الگوریتم Lanczos در نرم‌افزار آباکوس استخراج می‌شوند. شکل مودها نسبت به ماتریس جرم نرمال شده و در شکل ۲-۵ نشان داده شده‌اند. از مشارکت موده‌های دوم به بعد در پاسخ سیستم در فرکانس‌های پایین صرف نظر می‌گردد.

همان‌طور که در فصل ۲ اشاره گردید، از هر یک از تیرهای یک سر گیردار بالا و پایین فقط یک مود فرضی انتخاب شده و سیستم تیر دو گانه گیردار به صورت یک سیستم دو درجه آزادی مدل شده است. در ادامه از شکل مود ارائه

¹Natural boundary conditions

²Deformable 2D-planar shapes

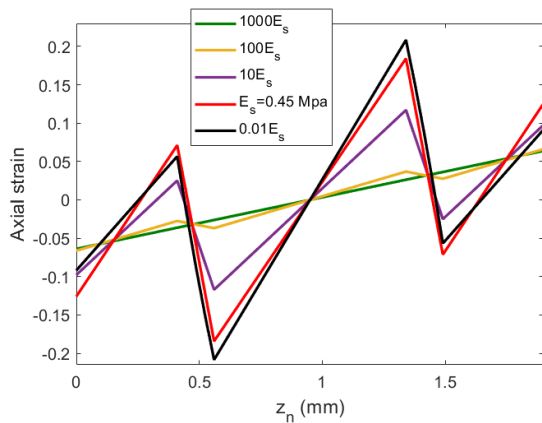
شده در شکل ۵-۲-الف، به عنوان مود فرضی استفاده می‌شود و با توجه به دو درجه آزادی بودن سیستم، مود دوم نیز به طور خودکار در آن لحاظ می‌گردد.



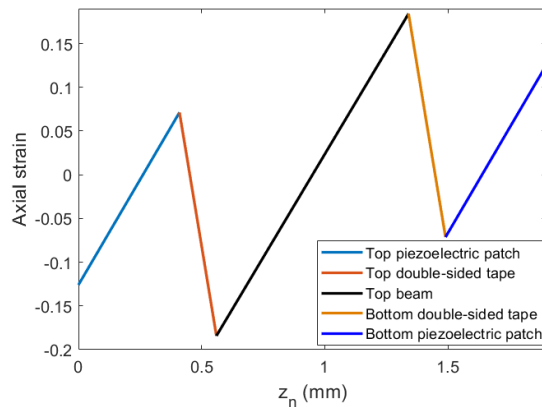
شکل ۵-۲- فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای به دست آمده از مدل اجزای محدود.

۵-۲ اثر چسب‌های دو طرفه بر کرنش محوری انتقالی از تیر بالا به وصله‌های پیزوالکتریک

در این بخش، هدف نشان دادن اهمیت چسب‌های دو طرفه در انتقال کرنش محوری از تیر بالا به وصله‌های پیزوالکتریک است. استفاده از چسب‌های دو طرفه سبب می‌شود که مقدار کرنش محوری منتقل شده از تیر بالا به وصله‌های پیزوالکتریک تغییر کند و در نتیجه مقدار ولتاژ و توان تولیدی نیز تغییر یابند. مقطع عرضی A-A که در شکل ۲-۱-ب نشان داده شده و در فاصله $L_A = 2 \text{ cm}$ از طرف گیردار قرار گرفته است، نشان‌دهنده مقطع عرضی میانی بخش چند لایه تیر یک سرگیردار بالا است (یعنی قسمتی که شامل تیر بالا، چسب‌های دو طرفه و وصله‌های پیزوالکتریک است). توزیع کرنش محوری در راستای مقطع عرضی A-A به وسیله حل اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس استخراج شده و در شکل ۵-۳ ارائه شده است. $\approx n$ از بالاترین سطح وصله پیزوالکتریک بالا تا پایین‌ترین سطح وصله پیزوالکتریک پایین اندازه‌گیری می‌شود (شکل ۲-۱-ب). با توجه به جدول‌های ۴-۱ و ۴-۲ تا ۴-۲، ضخامت کل تیر یک سرگیردار بالا در طرف گیردار شده برابر $h_t = 1.9 \text{ mm}$ است.



(ب) مدول‌های الاستیک متفاوت چسب دو طرفه (E_s).



(الف) مدول الاستیک چسب دو طرفه با مقدار $E_s = 0.45 \text{ Mpa}$

شکل ۵-۳- توزیع کرنش محوری در راستای مقطع عرضی میانی از تیر یک سرگیردار بالا.

توزیع کرنش محوری نشان داده شده در شکل ۵-۳-الف، نسبت به محور میانی تیر یک سرگیردار بالا (یعنی $z_n = h_t/2$) متقارن بوده که همان تار خنثی تیر بالا است. اندازه کرنش به صورت متقارن از محور میانی تیر بالا با علامت مخالف تا مرز بین تیر بالا و چسب‌های دو طرفه افزایش می‌یابد. چسب‌های دو طرفه بخشی از کرنش محوری که توسط تیر بالا تولید می‌شود را به هدر می‌دهند^۱. دلیل آن تغییر شکل زیاد چسب‌ها به دلیل مدول الاستیک کم آن‌ها است (پدیده پسا افت برش^۲) [۳۸]. بنابراین همه کرنشی که توسط تیر بالا تولید می‌شود، به وصله‌های پیزوالکتریک بالا و پایین منتقل نمی‌شود. به همین دلیل است که در مدل‌سازی سیستم پیشنهادی، تیرهای بالا و پایین به همراه وصله‌های پیزوالکتریک به صورت خمش خالص مدل شده و در چسب‌های دو طرفه نیز برش خالص در نظر گرفته شده است. بعد از لایه‌های چسب، کرنش محوری در وصله پیزوالکتریک بالا از یک مقدار بیشینه مثبت شروع شده، صفر شده و تا مقدار بیشینه منفی افزایش می‌یابد. بنابراین موقعیت تار خنثی در وصله پیزوالکتریک بالا جایی است که کرنش آن صفر می‌شود. فاصله بین آن تار خنثی و بالاترین سطح وصله پیزوالکتریک بالا برابر است با (با توجه به شکل ۱-۲-ب):

$$Z_{Na} = 0.26 \text{ mm} \tag{۱-۵}$$

اثر مقدار مدول الاستیک چسب‌های دو طرفه بر توزیع کرنش محوری مقطع عرضی میانی از تیر یک سرگیردار بالا در شکل ۵-۳-ب ارائه شده است. مدول الاستیکی که برای چسب استفاده شده در سیستم تجربی در نظر گرفته شده برابر $E_s = 0.45 \text{ Mpa}$ است. هر چه مقدار مدول الاستیک چسب افزایش یابد، کرنش تولیدی توسط تیر بالا با اتلاف کمتری به وصله‌های پیزوالکتریک منتقل می‌شود، در نتیجه در مدول الاستیک‌های بالاتر چسب دو طرفه، می‌توان تیر

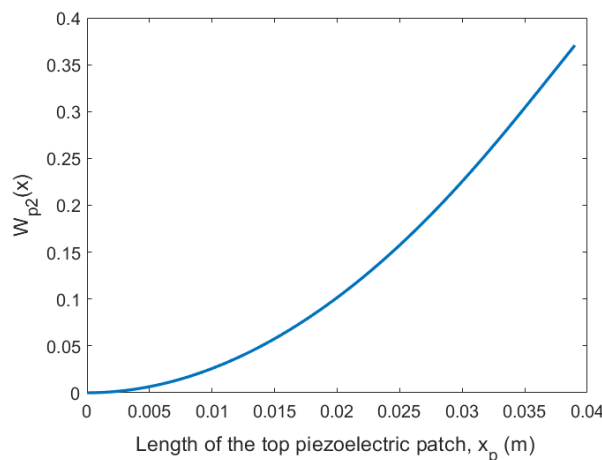
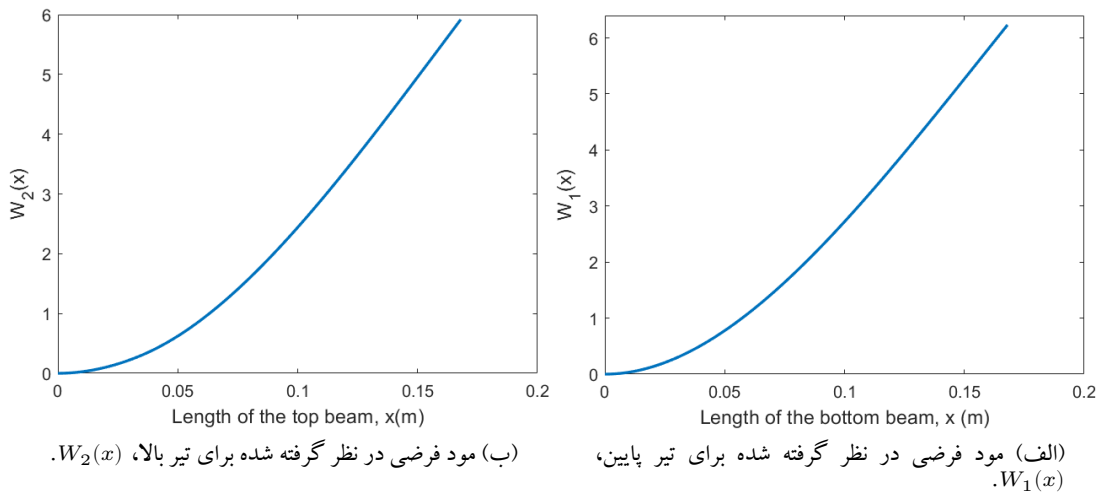
^۱Dissipate

^۲Shear lag phenomenon

بالا به همراه وصله‌های پیزوالکتریک را به شکل یک تیر یک سرگیردار با مقطع متغیر در نظر گرفت که تحت خمش خالص است (حالت $1000E_s$ در شکل ۵-۳-ب). با کاهش مدول الاستیک چسب، کرنش بیشتری توسط لایه‌های چسب به هدر رفته و کرنش انتقالی به وصله‌های پیزوالکتریک کاهش می‌یابد. بنابراین اگر از چسبی با مدول الاستیک مناسب در برابر سختی تیر استفاده شود، ولتاژ و توان بیشتری در وصله‌های پیزوالکتریک تولید خواهند شد.

۳-۵ مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده و اندازه‌گیری شده در سیستم برداشت انرژی

در این قسمت از شکل مودهای استخراج شده از حل اجزای محدود به وسیله نرم‌افزار آباکوس، برای تعیین مقدار پارامترهای معادلات حرکت استفاده می‌گردد. شکل مود اول به دست آمده از حل اجزای محدود (شکل ۵-۲-الف)، به عنوان مود فرضی در روش مودهای فرضی در نظر گرفته می‌شود که در شکل ۵-۴ برای تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک نمایش داده شده است.



شکل ۵-۴ - مودهای فرضی در نظر گرفته شده برای تیرهای پایین، بالا و وصله پیزوالکتریک بالا.

با داشتن مود فرضی در نظر گرفته شده، مقادیر پارامترهای جرم، سختی و سایر پارامترهای مربوطه از رابطه (پ-۴) ارائه شده در پیوست پ-۱، تعیین خواهند شد. معادله آخر در رابطه (پ-۴)، ماتریس میرایی است که به صورت تناسبی در نظر گرفته می‌شود. α و β که ضرایب ریلی ماتریس میرایی تناسبی هستند، به وسیله نسبت‌های میرایی به دست آمده از آزمایش تجربی (جدول ۴-۲)، استخراج می‌شوند. بنابراین تا به این جای کار، مقادیر تمامی پارامترهای به کار رفته در معادلات حرکت (۲-۲الف)-(۲-۲ب) مشخص می‌شوند. با داشتن مقدار عددی ماتریس‌های جرم و سختی از رابطه (۲-۲الف) در حالت عدم وجود آهنربای دوم (در این حالت آهنربای نصب شده بر پایه سیستم از آن جدا می‌شود و می‌توان فرض کرد که در روابط، فاصله میان دو آهنربای نهایی است یعنی $D_m = \infty$)، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم در حالت مدار باز به دست می‌آیند:

$$\omega_1 = 9.72 \text{ Hz} \quad (۲-۵)$$

$$\omega_2 = 21.76 \text{ Hz}$$

با داشتن فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده (رابطه (۲-۵)) و نسبت‌های میرایی اندازه‌گیری شده (جدول ۴-۲)، ضرایب ریلی ماتریس میرایی تناسبی از روش آنالیز مودال محاسبه می‌شوند:

$$\alpha = 2.7 \quad (۳-۵)$$

$$\beta = -0.00003467$$

پس از محاسبه ضرایب میرایی ریلی، ماتریس میرایی از رابطه $[C] = \alpha [M] + \beta [K]$ قابل محاسبه است. از ضرایب ریلی ارائه شده در رابطه (۳-۵)، بعداً در حالتی که سیستم به وسیله آهنربای دوم غیرخطی می‌شود، نیز استفاده می‌گردد. مقدار خطای فرکانس‌های طبیعی اول و دوم میان داده‌های تجربی و نظری در حالت مدار باز و عدم وجود آهنربای دوم (حالت خطی)، در جدول ۵-۱ ارائه شده است.

جدول ۵-۱ - خطای فرکانس‌های طبیعی اول و دوم میان داده‌های تجربی و نظری در حالت مدار باز و عدم وجود آهنربای دوم.

پارامتر	داده‌های تجربی	داده‌های نظری	درصد خطا
فرکانس طبیعی اول، ω_1 (Hz)	۹/۲۵	۹/۷۲	-۵/۱٪
فرکانس طبیعی دوم، ω_2 (Hz)	۲۱	۲۱/۷۶	-۳/۶۲٪

$$۱۰۰ \times \frac{\text{نظری} - \text{تجربی}}{\text{تجربی}} = \text{درصد خطا}$$

۴-۵ روش محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم

در این قسمت، روش محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم شرح داده می‌شود. با توجه به رابطه (۳-۳۱)، زمانی که در سیستم مورد بررسی تشدیدهای اولیه و داخلی به طور همزمان رخ می‌دهند، در پاسخ ارتعاشی سیستم، فرکانس تحریک (Ω) به همراه مقدار دو برابر آن (2Ω)، مشاهده می‌شوند. بنابراین با توجه به فصل ۳، زمانی که فرکانس طبیعی دوم برابر یا نزدیک دو برابر فرکانس طبیعی اول باشد، تشدید داخلی رخ می‌دهد. نسبت فرکانس طبیعی دوم به اول توسط فاصله بین دو آهنربا (D_m) قابل تنظیم است. هم‌چنین، زمانی که فرکانس تحریک سیستم نزدیک یا برابر فرکانس طبیعی اول باشد (تشدید اولیه)، مود اول سیستم با فرکانس Ω تحریک می‌شود. اگر چه با توجه به تشدید داخلی، بخشی از انرژی مود اول به مود دوم منتقل شده که باعث تحریک مود دوم با فرکانس 2Ω می‌شود. بنابراین، اگر در سیستم پیشنهادی تشدیدهای اولیه و داخلی همزمان رخ دهند، ترکیب مودهای اول (شکل ۵-۲-الف) و دوم (شکل ۵-۲-ب) در سیستم مشاهده خواهد شد. پس با توجه به ترکیب شدن دو مود اول، دامنه پایای جابه‌جایی تیرهای پایین و بالا متناظر با مشارکت مودهای اول و دوم با استخراج ضرایب عبارت‌های $\cos(\Omega T_0 - \gamma_2)$ و $\cos(2\Omega T_0 + \gamma_1 - 2\gamma_2)$ از رابطه (۳-۳۱)، به دست می‌آیند:

$$A_1(x) = av_{m1}W_1(x)$$

$$A_2(x) = bv_{m2}W_1(x)$$

(۴-۵)

$$B_1(x) = av_{m3}W_2(x)$$

$$B_2(x) = bv_{m4}W_2(x)$$

که پارامترهای $A_1(x)$ و $B_1(x)$ به ترتیب بیان‌گر دامنه پایای جابه‌جایی تیرهای پایین و بالا ناشی از مشارکت مود اول است. به طور مشابه، $A_2(x)$ و $B_2(x)$ نیز نشان‌دهنده دامنه پایای جابه‌جایی تیرهای پایین و بالا نتیجه شده از مود دوم است. با توجه به رابطه (۳-۳۰)، دامنه پایای ولتاژ تولیدی ناشی از مشارکت مودهای اول و دوم برابر است با:

$$V_1 = \frac{\tilde{\theta}_3 \omega_1}{\sqrt{\frac{1}{R_l^2} + c_p^2 \omega_1^2}} a$$

(۵-۵)

$$V_2 = \frac{\tilde{\theta}_4 \omega_2}{\sqrt{\frac{1}{R_l^2} + c_p^2 \omega_2^2}} b$$

که پارامترهای V_1 و V_2 ، دامنه‌های پایای ولتاژ تولیدی در فرکانس‌های Ω (مشارکت مود اول) و 2Ω (مشارکت مود دوم) هستند. بنابراین مقدار ولتاژ موثر (جذر میانگین مربعات ولتاژ تولیدی) نیز از رابطه (۵-۶) محاسبه می‌شود که مقدار

آن برابر جذر میانگین مربعات سیگنال زمانی ولتاژ نیز است.

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2}{2}} \quad (۶-۵)$$

مقدار جذر میانگین مربعات توان تولیدی (توان موثر) نیز برابر است با:

$$P_{RMS} = \frac{V_{RMS}^2}{R_l} \quad (۷-۵)$$

بنابراین، پاسخ فرکانسی سیستم شامل پاسخ ارتعاشی و ولتاژ (یا توان) موثر تولیدی در حالت پایا، بر حسب فرکانس تحریک سیستم با استفاده از روابط (۴-۵) و (۶-۵) رسم می‌شود. پاسخ فرکانسی در آزمایش تجربی و روش عددی حل روابط (۲-۲۸ الف)-(۲-۲۸ ب) (حل عددی مدل غیرخطی)، با گرفتن تبدیل فوریه^۱ از جابه‌جایی پایای تیرهای پایین و بالا و ولتاژ تولیدی و استخراج دامنه‌ها در فرکانس‌های Ω و 2Ω ، به دست می‌آید.

۵-۵ نتایج تجربی

در این قسمت، نتایج تجربی ارائه می‌شود و در ادامه بین آن‌ها و نتایج نظری مقایسه انجام خواهد شد. نتایج تجربی در دو حالت وجود و عدم وجود آهنربای دوم ارائه می‌شوند.

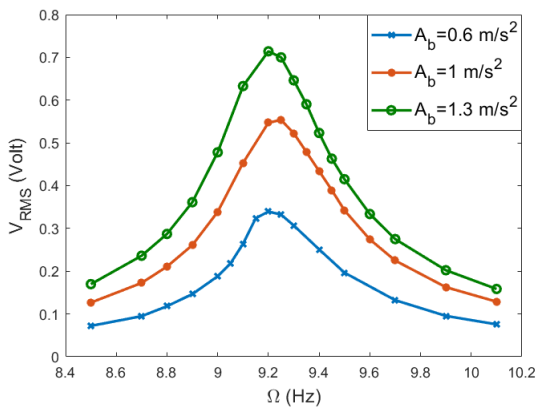
۱-۵-۵ حالت عدم وجود آهنربا

در حالت عدم وجود آهنربا، آهنربای دوم یعنی آهنربای نصب شده بر پایه سیستم حذف می‌شود (آهنربای نصب شده در انتهای تیر پایین، در سرتاسر این پژوهش همیشه وجود دارد و تغییری نمی‌کند). در این صورت نیروی غیرخطی از بین رفته و سیستم رفتار خطی از خود نشان می‌دهد. در این شرایط، سیستم اطراف فرکانس‌های طبیعی اول و دوم خود تحریک می‌شود. هدف اصلی برداشت انرژی در مود اول سیستم پیشنهادی است، چون مقدار انرژی الکتریکی بیشتری نسبت به مود دوم برداشت می‌شود.

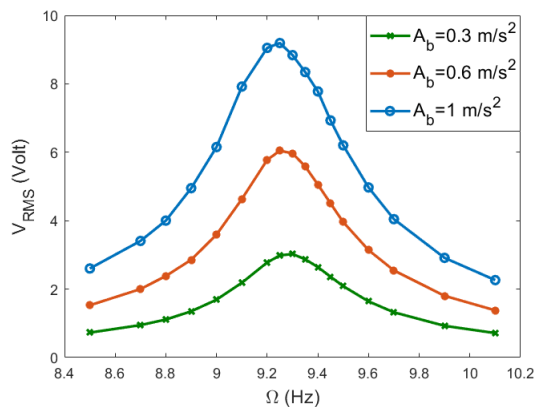
شکل ۵-۵ اثر شتاب پایه بر ولتاژ و توان اندازه‌گیری شده را در مود اول حالت عدم وجود آهنربا نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است، افزایش شتاب پایه سبب افزایش ولتاژ و توان تولیدی می‌شود. شکل ۵-۵ ج توان اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهد که از شکل ۵-۵ ب نتیجه شده است.

در شکل ۶-۵، اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان موثر تولیدی در مود اول حالت عدم وجود آهنربا برای شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ولتاژ تولیدی با افزایش مقدار مقاومت الکتریکی افزایش می‌یابد، در حالی که توان تولیدی این گونه نیست.

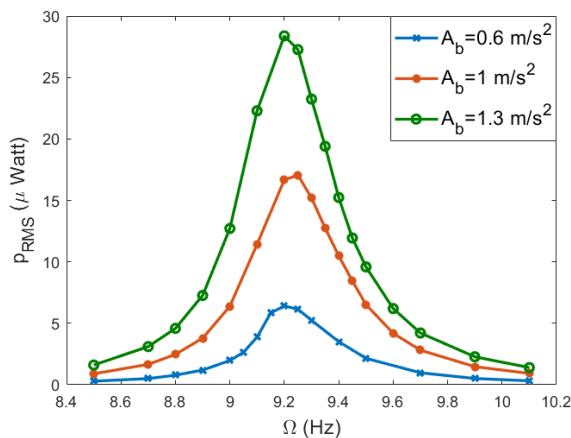
^۱Fourier transform



(ب) ولتاژ موثر اندازه گیری شده در مقاومت ۱۷/۹۷ کیلو اهم.



(الف) ولتاژ موثر اندازه گیری شده در حالت مدار باز (مقاومت بی نهایت)



(ج) توان موثر اندازه گیری شده در مقاومت ۱۷/۹۷ کیلو اهم، نتیجه شده از شکل ۵-۵-ب.

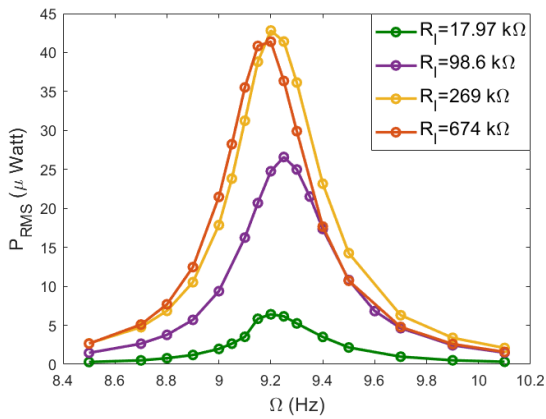
شکل ۵-۵- اثر شتاب پایه بر ولتاژ و توان موثر اندازه گیری شده در مود اول حالت عدم وجود آهنربا برای مقاومت های بی نهایت (حالت مدار باز) و ۱۷/۹۷ کیلو اهم.

با توجه به شکل های ۵-۶-ب و ۵-۶-د، در یک مقاومت الکتریکی مشخصی، توان تولیدی بیشینه می شود که در این جا توان بیشینه در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم برداشت می شود.

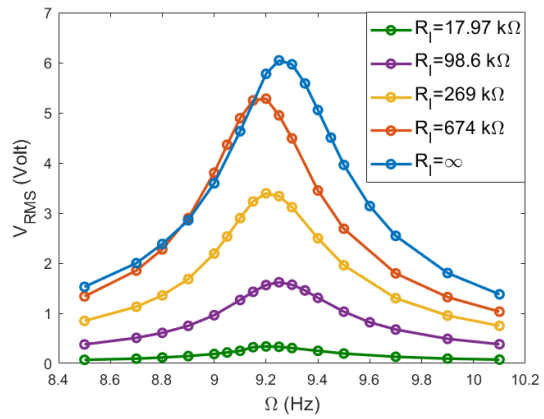
در مدل سازی ریاضی با توجه به این که سیستم پیشنهادی به شکل سیستم دو درجه آزادی مدل شده و هم چنین ترکیب شدن مودهای اول و دوم در تشدید داخلی در حالت وجود آهنربای دوم، داشتن نسبت میرایی مود دوم نیز ضروری است. بدین منظور، سیستم در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا نیز تحریک می شود.

در شکل ۵-۷، نتایج تجربی ولتاژ موثر تولیدی در مود دوم حالت عدم وجود آهنربای دوم ارائه شده است. شکل های ۵-۷-الف و ۵-۷-ب به ترتیب اثر شتاب پایه و مقدار مقاومت الکتریکی بر ولتاژ موثر اندازه گیری شده در مود دوم را نشان می دهد.

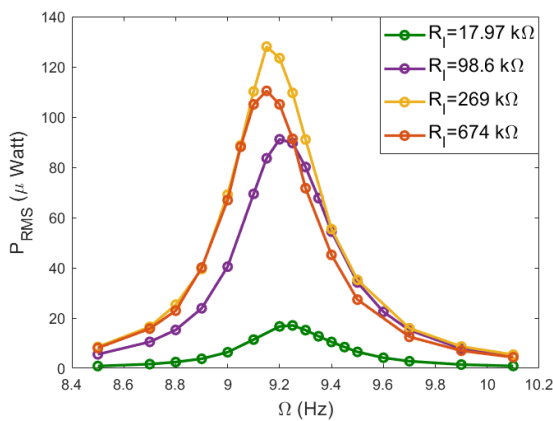
با توجه به شکل های ۵-۵-ج تا ۵-۷، فرکانس های طبیعی و نسبت های میرایی اندازه گیری شده در مودهای اول و دوم حالت عدم وجود آهنربا در جدول ۴-۲ ارائه شده است.



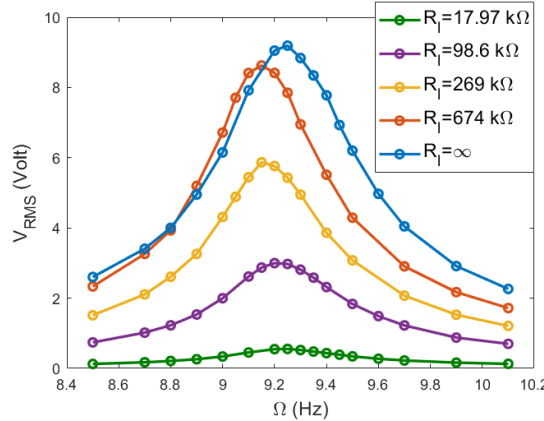
(ب) توان موثر اندازه‌گیری شده در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.



(الف) ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.

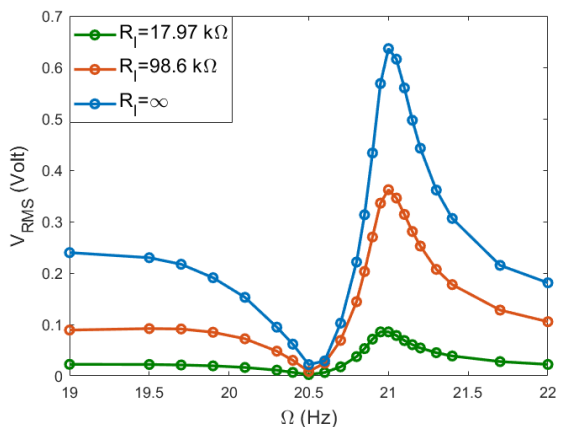


(د) توان موثر اندازه‌گیری شده در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.

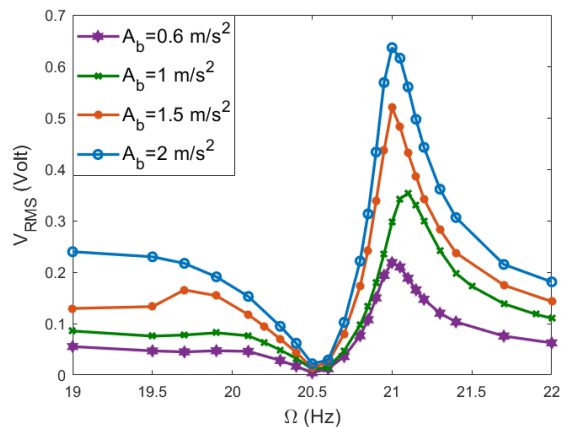


(ج) ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.

شکل ۵-۶- اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان موثر اندازه‌گیری شده در مود اول حالت عدم وجود آهنربا در شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه.



(ب) اثر مقاومت الکتریکی در شتاب پایه ۲ متر بر مجذور ثانیه.



(الف) اثر شتاب پایه در حالت مدار باز.

شکل ۵-۷- اثر شتاب پایه و مقاومت الکتریکی بر ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا.

۵-۵-۲ صحت‌سنجی نتایج مدل‌سازی ریاضی در حالت عدم وجود آهنربا به وسیله نتایج تجربی

در این بخش، نتایج مدل‌سازی ریاضی در حالت عدم وجود آهنربای دوم به وسیله نتایج تجربی ارائه شده در بخش ۵-۵-۱، صحت‌سنجی می‌شوند. برای اشاره به نتایج تجربی و حل عددی در شکل‌ها به ترتیب از نام‌گذاری‌های تجربی^۱ و عددی^۲ استفاده می‌شود. حل عددی استفاده شده در این قسمت مشابه حل عددی انجام گرفته برای رابطه (۲-۲۸الف)- (۲-۲۸ب) (یعنی راه‌حل عددی مدل غیرخطی)، در فاصله اولیه بزرگ میان دو آهنربا است. مثلاً می‌توان از فاصله اولیه ۸ سانتی‌متر میان آهنرباهای اول و دوم برای حل حالت عدم وجود آهنربا استفاده کرد، چون در این فاصله نیروی آهنربا ضعیف بوده و می‌توان گفت که سیستم رفتار خطی دارد.

در شکل‌های ۵-۸ و ۵-۹، میان نتایج تجربی و راه‌حل عددی در مود اول حالت عدم وجود آهنربا در مقاومت‌های الکتریکی مختلف و شتاب‌های پایه ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه، مقایسه انجام شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج نظری دقت قابل قبولی در برابر نتایج تجربی در مود اول حالت عدم وجود آهنربا دارند.

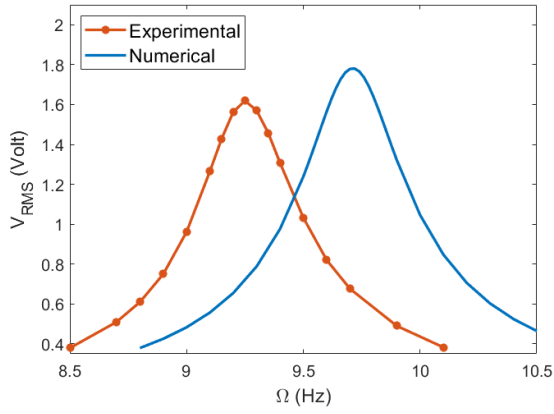
در شکل ۵-۱۰، نتایج راه‌حل عددی در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا، به وسیله نتایج تجربی در شرایط مختلف شتاب پایه و مقاومت الکتریکی صحت‌سنجی شده‌اند. همان‌طور که مشخص است، نتایج نظری در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا نیز دقت قابل قبولی نسبت به نتایج تجربی دارند.

خطای قله^۳ ولتاژ میان نتایج عددی و تجربی در مودهای اول و دوم حالت عدم وجود آهنربا، در جدول‌های ۵-۲ و ۵-۳ ارائه شده است. خطای فرکانس‌های متناظر با قله ولتاژ (فرکانس‌های تشدید) میان نتایج تجربی و نظری در حالت مدار باز قبلاً در جدول ۵-۱ ارائه شده است. برای سایر مقاومت‌های الکتریکی میان حالت مدار باز و مدار بسته (یعنی از مقدار مقاومت الکتریکی بی‌نهایت تا صفر)، فرکانس‌های تشدید به میزان بسیار کمی نسبت به حالت مدار باز کاهش می‌یابند که قابل صرف نظر کردن است.

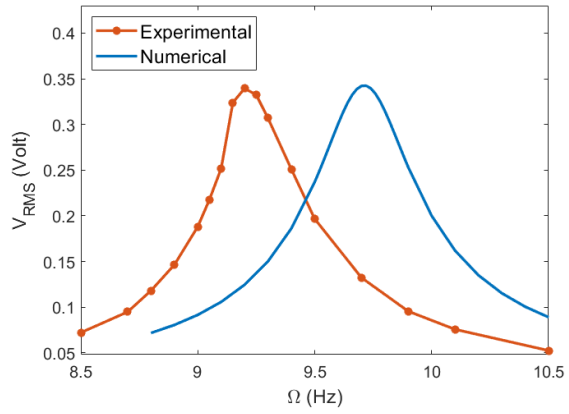
¹Experimental

²Numerical

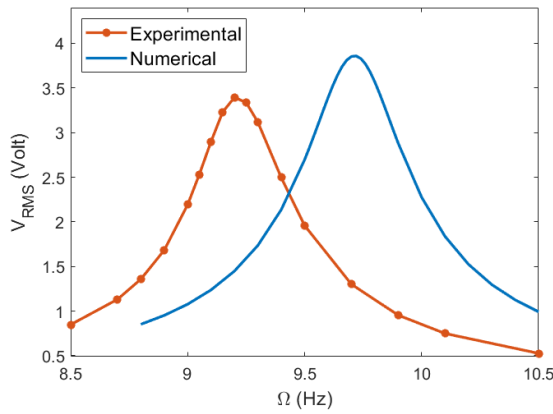
³Peak



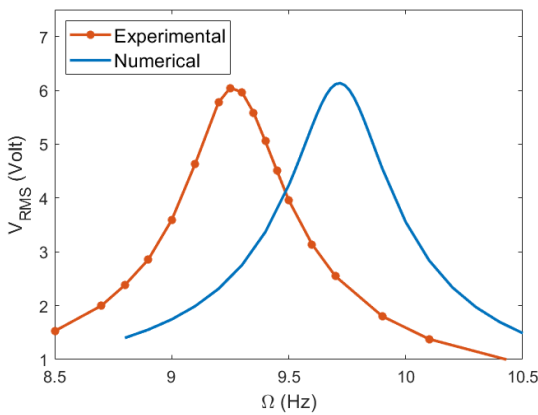
(ب) مقاومت الکتریکی ۹۸/۶ کیلو اهم.



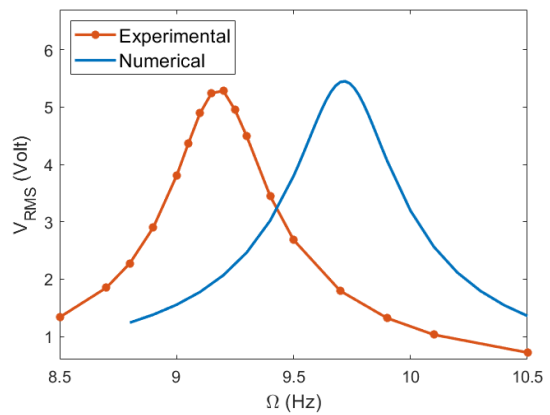
(الف) مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم.



(ج) مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم.

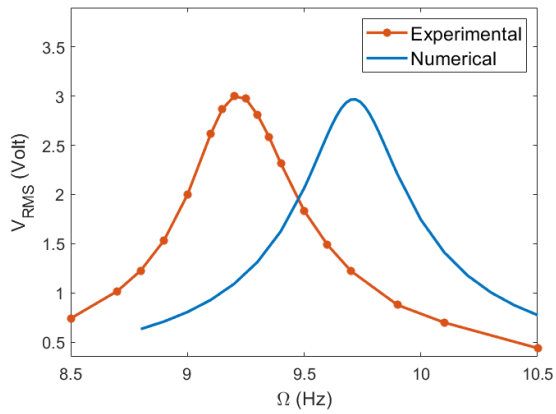


(ه) حالت مدار باز (مقاومت بی نهایت).

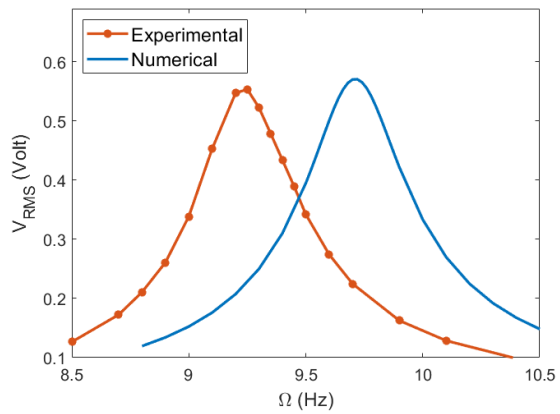


(د) مقاومت الکتریکی ۶۷۴ کیلو اهم.

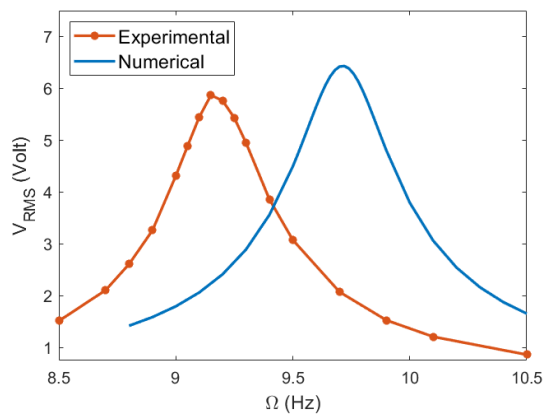
شکل ۵-۸ - مقایسه میان نتایج تجربی و راه حل عددی در ولتاژ موثر تولیدی برای مقاومت های الکتریکی متفاوت و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در مود اول حالت عدم وجود آهنربا.



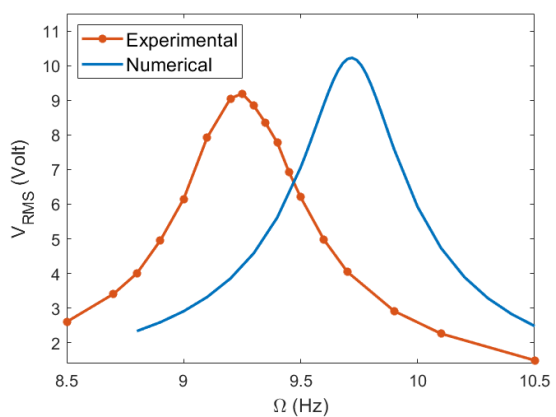
(ب) مقاومت الکتریکی ۹۸/۶ کیلو اهم.



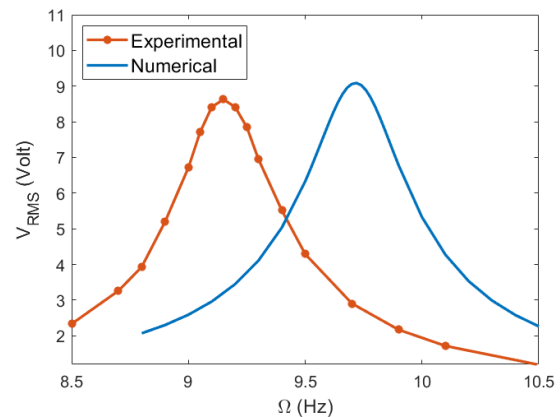
(الف) مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم.



(ج) مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم.

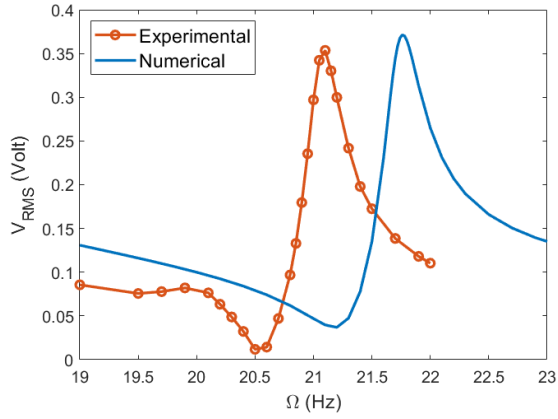


(ه) حالت مدار باز (مقاومت بی نهایت).

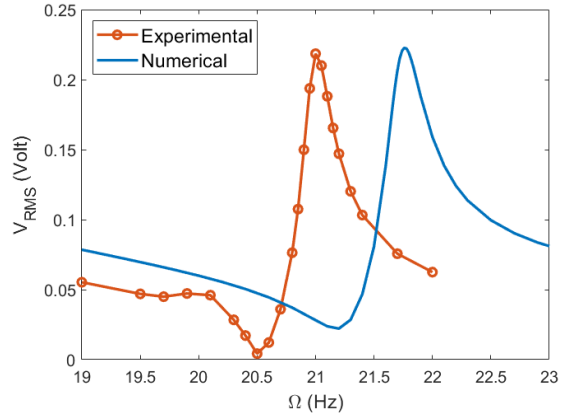


(د) مقاومت الکتریکی ۶۷۴ کیلو اهم.

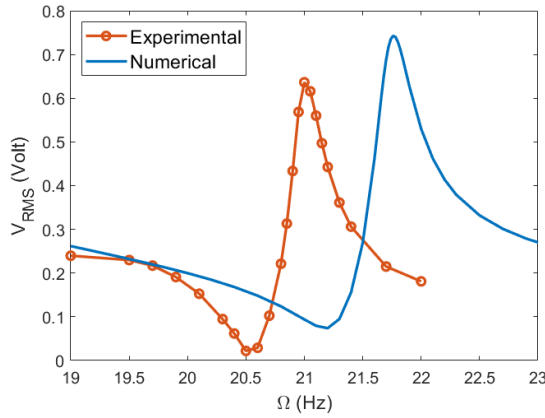
شکل ۵-۹ - مقایسه میان نتایج تجربی و راه حل عددی در ولتاژ موثر تولیدی برای مقاومت های الکتریکی متفاوت و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در مود اول حالت عدم وجود آهنربا.



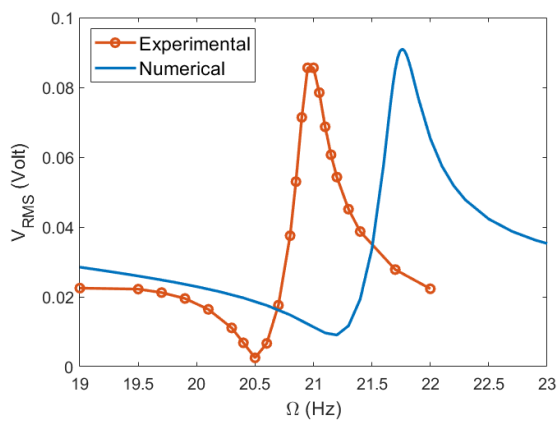
(ب) شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه و حالت مدار باز.



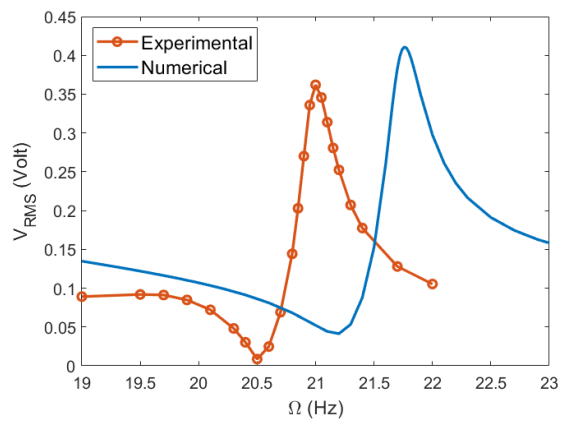
(الف) شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه و حالت مدار باز.



(ج) شتاب پایه ۲ متر بر مجذور ثانیه و حالت مدار باز.



(ه) شتاب پایه ۲ متر بر مجذور ثانیه و مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم.



(د) شتاب پایه ۲ متر بر مجذور ثانیه و مقاومت الکتریکی ۹۸/۶ کیلو اهم.

شکل ۵-۱۰ - مقایسه میان نتایج تجربی و راه حل عددی در ولتاژ موثر تولیدی و شرایط مختلف مقاومت الکتریکی و شتاب پایه در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا.

جدول ۵-۲- درصد خطای قله ولتاژ میان نتایج عددی و تجربی در مود اول حالت عدم وجود آهنربا در شتاب‌های پایه ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه.

درصد خطا در شتاب پایه 1 m/s^2	درصد خطا در شتاب پایه $0/6 \text{ m/s}^2$	مقاومت الکتریکی ($k\Omega$)
+۳/۰۵	+۰/۸۸	۱۷/۹۷
-۱/۰۳	+۹/۹۴	۹۸/۶
+۹/۵۸	+۱۳/۷	۲۶۹
+۵/۳۱	+۳/۲۰	۶۷۴
+۱۱/۱۸	+۱/۴۶	∞

جدول ۵-۳- درصد خطای قله ولتاژ میان نتایج عددی و تجربی در مود دوم حالت عدم وجود آهنربا.

درصد خطا	مقاومت الکتریکی ($k\Omega$)	شتاب پایه (m/s^2)
+۱/۹۷	∞	۰/۶
+۵/۰۱	∞	۱
+۱۶/۶۹	∞	۲
+۱۳/۵۱	۹۸/۶	۲
+۶/۲۹	۱۷/۹۷	۲

بنابراین با توجه به شکل‌های ۵-۸ تا ۵-۱۰، مدل‌سازی ریاضی انجام شده می‌تواند نتایج تجربی در حالت عدم وجود آهنربا را با دقت بالایی پیش‌بینی کند. یکی از مهم‌ترین عواملی که سبب تفاوت بین نتایج نظری و تجربی می‌شود، شرایط تکیه‌گاهی گیردار برای تیرها است که در مدل‌سازی به صورت ایده‌آل در نظر گرفته شده است. یعنی در نقطه گیردار شده، خیز و شیب صفر فرض می‌شود، در حالی که در آزمایش، ساختن تکیه‌گاهی که تا حد امکان شیب نزدیک صفر داشته باشد، دشوار است.

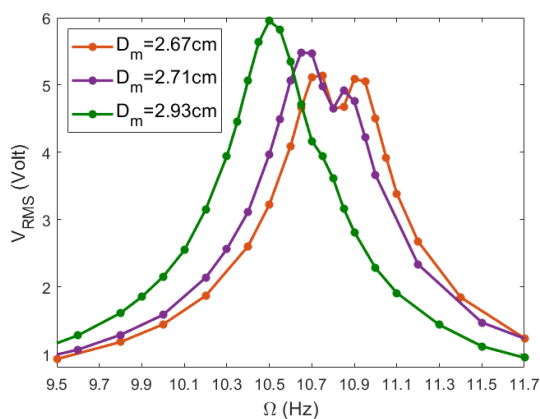
۳-۵-۵ حالت وجود آهنربا

با توجه به شکل ۴-۱، در حالت وجود آهنربا، آهنربای دوم که بر پایه سیستم نصب می‌شود، در فاصله مشخصی (یعنی D_m) از آهنربای اول که بر روی تیر پایین نصب شده، قرار داده می‌شود. در این حالت، سیستم فقط در اطراف فرکانس طبیعی اول تحریک شده و ولتاژ تولیدی اندازه‌گیری می‌شود. با اضافه شدن آهنربای دوم، سیستم غیرخطی می‌شود. فرکانس‌های طبیعی اول و دوم در حالت وجود آهنربا نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، به دلیل اضافه شدن سختی آهنربا به سیستم، افزایش می‌یابند. فرکانس‌های طبیعی اول و دوم محاسبه شده (نظری) در سیستم تیر دوگانه گیردار بر حسب فاصله اولیه میان دو آهنربا، با توجه به روابط (۳-۳۲) و (۳-۳۸) (در حالت $\varepsilon = 1$)، در جدول ۴-۵ داده شده‌اند. لازم به ذکر است که در شتاب پایه‌های کوچک، تمامی عبارات‌های غیرخطی یعنی p_2 و p_3 در روابط (۳-۳۳) الف) - (۳-۳۳) ب)، تقریباً تاثیری در پاسخ سیستم ندارند. اگرچه p_1 باعث تغییر سختی سیستم شده و فرکانس طبیعی سیستم را جابه‌جا می‌کند. بنابراین در شتاب پایه‌های کوچک می‌توان فرض کرد که سیستم رفتار خطی از خود نشان داده و دارای فرکانس طبیعی است.

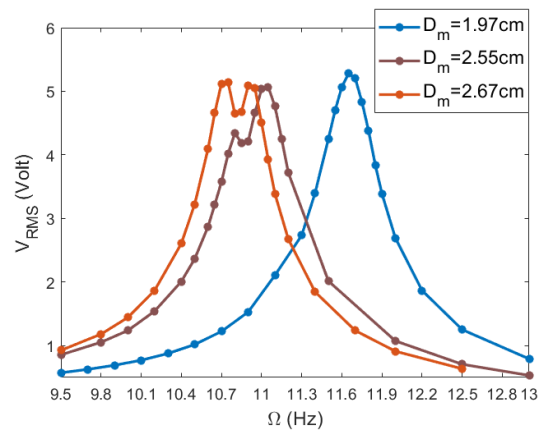
جدول ۴-۵ - فرکانس‌های طبیعی اول و دوم نظری سیستم تیر دوگانه گیردار در حالت وجود آهنربا به همراه پارامتر تنظیم‌کننده تشدید داخلی بر حسب فاصله اولیه مختلف آهنربا در حالت مدار باز.

σ_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_1 (Hz)	D_m (cm)
-۱/۲۰۳	۲۲/۹۴	۱۲/۰۷	۱/۹۷
-۰/۱۹۰	۲۲/۴۴	۱۱/۳۲	۲/۵۵
+۰/۰۱۰	۲۲/۳۷	۱۱/۱۸	۲/۶۷
+۰/۰۷۵	۲۲/۳۴	۱۱/۱۳	۲/۷۱
+۰/۴۱۸	۲۲/۲۲	۱۰/۹۰	۲/۹۳

شکل‌های ۵-۱۱ و ۵-۱۲، اثر فاصله اولیه میان دو آهنربا بر پاسخ فرکانسی ولتاژ موثر اندازه‌گیری شده در شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای بعضی از فاصله‌های اولیه آهنربا، در اطراف فرکانس طبیعی اول در پاسخ فرکانسی دو قله مشاهده می‌شود. این دو قله نشان‌دهنده وجود تشدید داخلی و ترکیب شدن مودهای اول و دوم سیستم است. در ترکیب شدن مودها، انرژی بین دو مود اول جابه‌جا می‌شود. در مقدار مشخصی از فاصله اولیه میان دو آهنربا، اندازه دو قله تقریباً برابر می‌شود که در سیستم پیشنهادی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر است. با توجه به جدول ۴-۵، در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا، مقدار پارامتر تنظیم‌کننده در تشدید داخلی کمترین مقدار را در بین سایر فواصل آهنربا دارد و مقدار آن نزدیک صفر است.

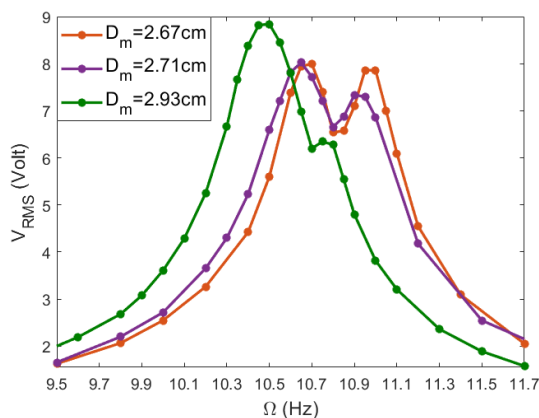


(ب) برای فاصله اولیه آهنربا، $D_m \geq 2.67$ cm

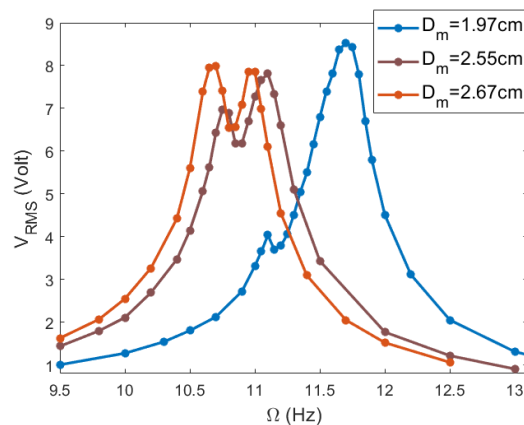


(الف) برای فاصله اولیه آهنربا، $D_m \leq 2.67$ cm

شکل ۵-۱۱ - اثر فاصله اولیه میان دو آهنربا بر ولتاژ موثر اندازه گیری شده در حالت مدار باز و شتاب پایه $0/6$ متر بر مجذور ثانیه.



(ب) برای فاصله اولیه آهنربا، $D_m \geq 2.67$ cm



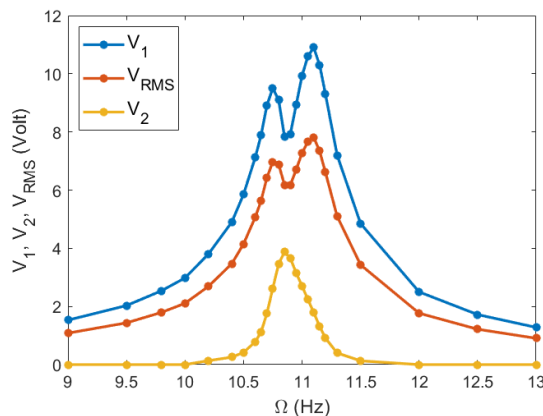
(الف) برای فاصله اولیه آهنربا، $D_m \leq 2.67$ cm

شکل ۵-۱۲ - اثر فاصله اولیه میان دو آهنربا بر ولتاژ موثر اندازه گیری شده در حالت مدار باز و شتاب پایه 1 متر بر مجذور ثانیه.

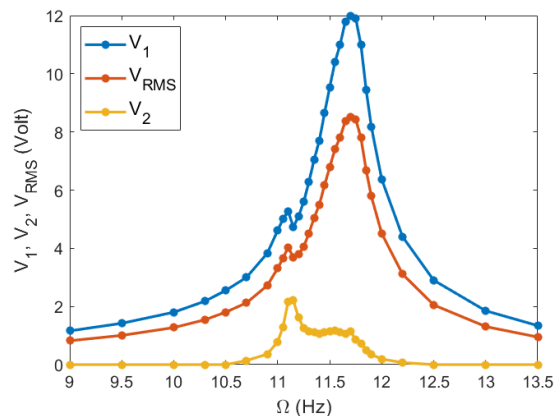
در این حالت می توان گفت که فرکانس طبیعی دوم دقیقاً دو برابر فرکانس طبیعی اول است. پارامتر تنظیم کننده در فاصله های کمتر و بزرگتر از $2/67$ سانتی متر به ترتیب دارای مقدار منفی و مثبت است. با توجه به شکل های ۵-۱۱-الف و ۵-۱۲-الف، با کاهش فاصله اولیه آهنربا از مقدار $2/67$ به مقدار $1/97$ سانتی متر و در نتیجه قوی تر شدن نیروی آهنربا و سختی سیستم، فرکانس متناظر با قله غالب (بزرگترین قله) به سمت راست حرکت می کند. هم چنین، قله سمت راست نسبت به قله سمت چپ بزرگتر شده تا این که قله سمت چپ بسیار کوچک شده و یا حذف می شود. در شکل های ۵-۱۱-ب و ۵-۱۲-ب، با افزایش فاصله اولیه آهنربا از مقدار $2/67$ به مقدار $2/93$ سانتی متر، فرکانس متناظر با قله غالب به سمت چپ حرکت کرده و قله سمت چپ نسبت به قله سمت راست بزرگتر شده تا این که قله سمت راست بسیار کوچک و یا حذف می گردد. تغییر رفتار شرح داده شده در قله های سمت راست و چپ پاسخ فرکانسی در فواصل اولیه آهنربا قبل و بعد از $2/67$ سانتی متر، در ادامه در شکل های ۵-۲۰ و ۵-۲۱ نیز قابل مشاهده است.

همان طور که اشاره گردید، داشتن دو قله در پاسخ فرکانسی حول یکی از فرکانس های طبیعی (مثلاً فرکانس طبیعی

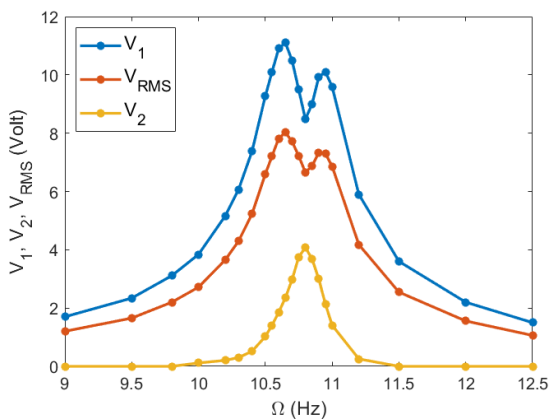
اول)، نشانه وجود تشدید داخلی و ترکیب شدن مودهای سیستم با یکدیگر است. با توجه به توضیحاتی که قبلاً برای روابط (۳-۳۰) و (۵-۵) ارائه گردید، تبدیل فوریه پاسخ ولتاژ سیستم دارای دامنه‌های V_1 و V_2 به ترتیب در فرکانس تحریک (Ω) و دو برابر آن (2Ω) است. V_1 و V_2 به ترتیب نشان‌دهنده دامنه ولتاژ تولیدی به وسیله مودهای اول و دوم هستند که V_1 به دلیل این که دامنه ولتاژ در فرکانس تحریک است، دامنه اصلی ولتاژ تولیدی است. در شکل ۵-۱۳ دامنه‌های V_1 ، V_2 و V_{RMS} بر حسب فرکانس تحریک Ω رسم شده‌اند. V_{RMS} برابر ولتاژ موثر دامنه‌های V_1 و V_2 یا ولتاژ موثر سیگنال زمانی ولتاژ است. همان‌طور که اشاره گردید، دامنه V_2 فقط در فرکانس 2Ω دارای مقدار است، ولی برای مقایسه بهتر آن با دامنه V_1 ، بر حسب فرکانس Ω رسم شده است. شکل ۵-۱۳ نشان می‌دهد که میان فرکانس‌های متناظر با دو قله دامنه اصلی ولتاژ (V_1)، علاوه بر مود اول، مود دوم نیز تحریک می‌شود و پاسخ فرکانسی ولتاژ اندازه‌گیری شده ترکیبی از مودهای اول و دوم است (چون هر دوی دامنه‌های V_1 و V_2 در این محدوده دارای مقدار هستند).



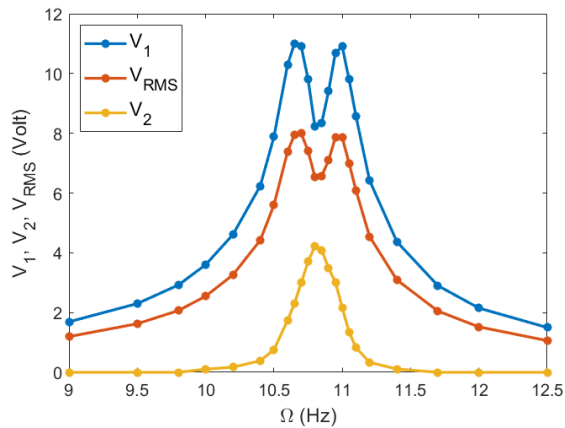
(ب) در فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.55$ cm



(الف) در فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 1.97$ cm



(د) در فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.71$ cm



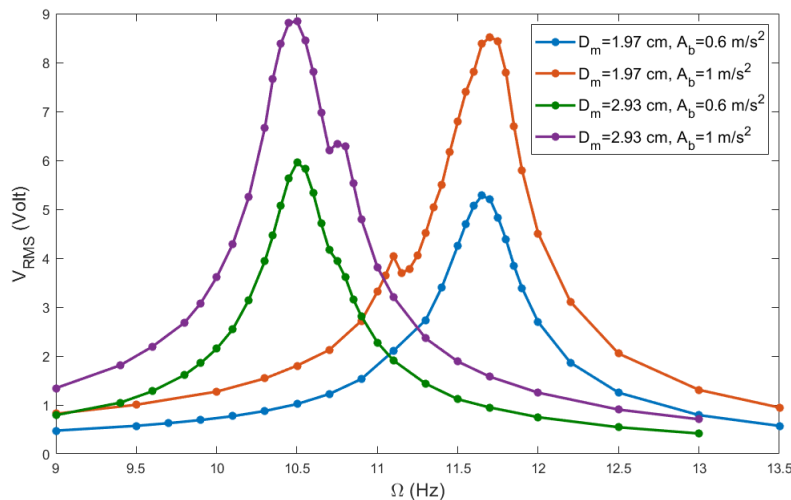
(ج) در فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.67$ cm

شکل ۵-۱۳ - نمودار دامنه‌های ولتاژ اندازه‌گیری شده در فواصل اولیه مختلف آهنربا در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز.

ولتاژ تولیدی به وسیله مود اول در فرکانس‌های متناظر با دو قله دامنه ولتاژ V_{RMS} و ولتاژ تولیدی به وسیله مود

دوم در فرکانس‌های بین آن دو قله به مقدار بیشینه خود می‌رسند. در هر فاصله اولیه‌ای از آهنربا، فرکانس طبیعی اول بین فرکانس‌های متناظر با دو قله V_{RMS} قرار می‌گیرد. در فاصله اولیه $۲/۶۷$ سانتی‌متر و اطراف آن یعنی فواصل $۲/۵۵$ و $۲/۷۱$ سانتی‌متر، ولتاژ تولید شده به وسیله مود دوم به طور تقریبی در فرکانس متناظر با نقطه کمینه بین دو قله V_{RMS} ، به مقدار بیشینه خود می‌رسد. در این حالت می‌توان گفت که فرکانس طبیعی دوم سیستم تقریباً دو برابر فرکانس متناظر با نقطه کمینه بین دو آن قله است. چون در این فرکانس، مقدار V_2 بیشینه شده است (همان‌طور که قبلاً اشاره شد، V_2 فقط در اطراف فرکانس 2Ω مقدار دارد ولی برای مقایسه بهتر، بر حسب نصف آن فرکانس یعنی فرکانس تحریک رسم می‌گردد).

فواصل آهنربای $۱/۹۷$ و $۲/۹۳$ سانتی‌متر که در شکل‌های ۵-۱۱ و ۵-۱۲ نمایش داده شده‌اند، به منظور مقایسه بهتر، در کنار یکدیگر در شکل ۵-۱۴ رسم می‌شوند.



شکل ۵-۱۴ - اثر شتاب پایه بر ولتاژ اندازه‌گیری شده در فواصل اولیه آهنربا $۱/۹۷$ و $۲/۹۳$ سانتی‌متر در حالت مدار باز.

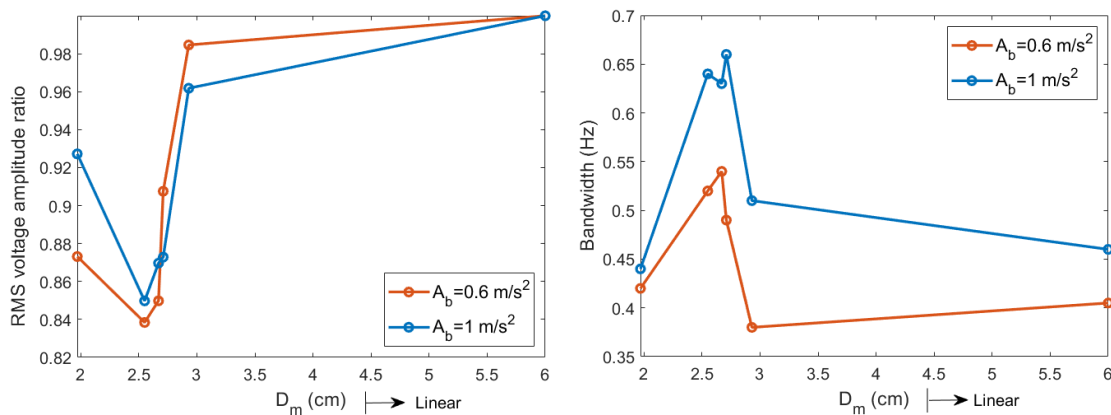
باتوجه به جدول ۵-۴، در این دو فاصله، مقدار پارامتر تنظیم‌کننده در تشدید داخلی (σ_1) اندازه بزرگی نسبت به سایر فواصل آهنربا دارد که به معنای دور بودن فرکانس طبیعی دوم از دو برابر فرکانس طبیعی اول است. بنابراین در این شرایط، مود اول انرژی کافی برای انتقال بخشی از انرژی خود به مود دوم و تحریک آن را ندارد. البته در این حالت سیستم رفتار غیرخطی از خود نشان می‌دهد ولی تشدید داخلی در آن رخ نمی‌دهد. با افزایش شتاب پایه از مقدار $۰/۶$ به مقدار ۱ متر بر مجذور ثانیه، انرژی لازم برای تحریک شدن مود دوم فراهم می‌شود. بنابراین در پاسخ فرکانسی، قله‌های کوچک سمت چپ و راست به ترتیب برای فواصل آهنربای $۱/۹۷$ و $۲/۹۳$ سانتی‌متر در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه پدیدار می‌شوند که نشان‌دهنده رخ دادن تشدید داخلی در سیستم است. در این حالت اثر غیرخطی در سیستم قوی‌تر شده و تشدید داخلی نیز در کنار آن رخ می‌دهد. هم‌چنین مقایسه شکل‌های ۵-۱۱ و ۵-۱۲ نشان می‌دهد که با افزایش شتاب پایه، دامنه قله‌های کوچکتر، بزرگتر شده که ناشی از افزایش شدت تشدید داخلی و در نتیجه افزایش انرژی منتقل

شده به مود دوم است.

به طور خلاصه، در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر که پارامتر تنظیم کننده در تشدید داخلی تقریباً برابر صفر است، در پاسخ فرکانسی دو قله با اندازه‌های تقریباً یکسان و متقارن مشاهده می‌شود. برای فاصله‌های کمتر از ۲/۶۷ سانتی متر، اثر غیرخطی در سیستم افزایش یافته و در پاسخ فرکانسی دو قله مشاهده شده که قله سمت راست از قله سمت چپ بزرگتر است. در فاصله‌های بزرگتر از ۲/۶۷ سانتی متر، اثر غیرخطی در سیستم کاهش یافته و قله سمت چپ در پاسخ فرکانسی بزرگتر از قله سمت راست خواهد بود. تشدید داخلی برای فاصله‌های دورتر از ۲/۶۷ سانتی متر، به ویژه در شتاب پایه‌های کوچک، به سختی رخ می‌دهد که دلیل آن دور بودن فرکانس طبیعی دوم از دو برابر فرکانس طبیعی اول و در نتیجه نبود انرژی کافی در مود اول برای تحریک مود دوم است.

با توجه به شکل‌های ۱۱-۵ و ۱۲-۵، مقدار بیشینه ولتاژ در فواصل اولیه مختلف آهنربا تقریباً مقادیر نزدیکی به یکدیگر دارند. بنابراین، برای دانستن این که کدام فاصله اولیه آهنربا برای برداشت انرژی مناسب‌تر است، پهنای باند^۱ آن‌ها مقایسه خواهد شد. در این پژوهش، پهنای باند در پاسخ فرکانسی به صورت محدوده فرکانسی که مقدار ولتاژ در آن، $1/\sqrt{2}$ برابر مقدار بیشینه آن می‌شود، تعریف می‌شود. در نظر گرفتن این تعریف برای پهنای باند به مفهوم آن است که در محدوده پهنای باند، بیشتر از ۷۰/۷٪ مقدار ولتاژ بیشینه قابل برداشت است (یا به طور معادل بیشتر از ۵۰٪ مقدار توان بیشینه برداشت می‌شود).

در شکل ۱۵-۵، پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ^۲ نمایش داده شده که از شکل‌های ۱۱-۵ و ۱۲-۵ نتیجه شده است.



(ب) نسبت دامنه ولتاژ اندازه گیری شده.

(الف) پهنای باند ولتاژ اندازه گیری شده.

شکل ۱۵-۵ - اثر فاصله اولیه آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ اندازه گیری شده در شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز.

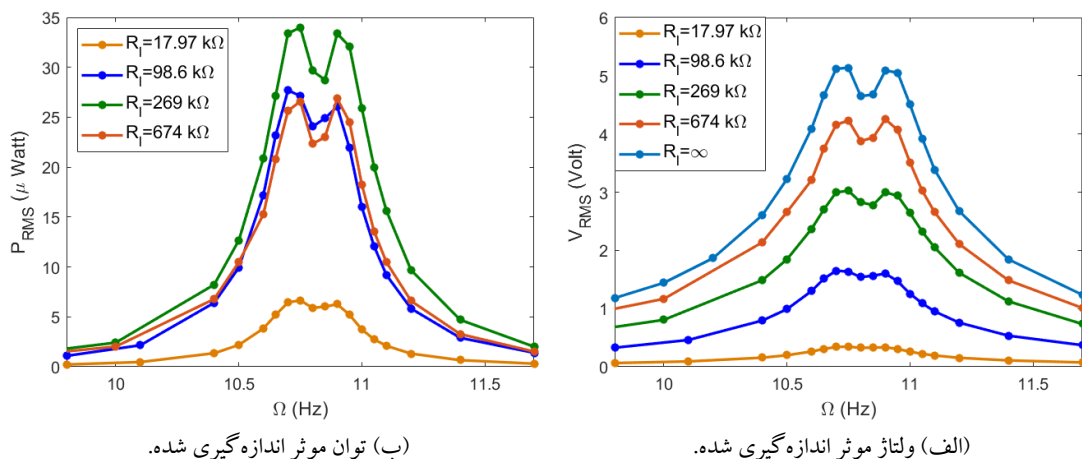
نسبت دامنه ولتاژ از تقسیم کردن مقدار بیشینه ولتاژ موثر در پاسخ فرکانسی حالت وجود آهنربا بر حالت عدم وجود

¹Bandwidth

²Voltage amplitude ratio

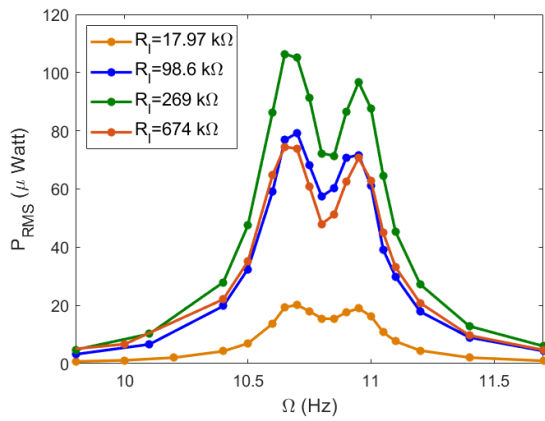
آهنربا (بخش ۵-۵-۱) در شرایط یکسان، به دست می‌آید. به طور نمادین، از فاصله اولیه ۶ سانتی‌متر، برای نشان دادن حالت عدم وجود آهنربا در شکل‌های این بخش استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۵-۱۵-الف، در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و اطراف آن یعنی فواصل ۲/۵۵ و ۲/۷۱ سانتی‌متر، پهنای باند ولتاژ اندازه‌گیری شده در حالت مدار باز نسبت به سایر فواصل اولیه آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا، بیشینه است. شکل ۵-۱۵-ب نیز نشان می‌دهد که در حالت مدار باز، مقدار نسبت دامنه ولتاژ اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر و اطراف آن، کمینه است. بنابراین، می‌توان گفت فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر و اطراف آن در حالت مدار باز، دارای بیشترین پهنای باند و کمترین نسبت دامنه ولتاژ در میان سایر فواصل اولیه آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا هستند. با توجه به شکل ۵-۱۵-الف، افزایش شتاب پایه از مقدار ۰/۶ به ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز، پهنای باند را به طور موثر در هر فاصله اولیه آهنربا (در حالت وجود آهنربا) افزایش می‌دهد. به دلیل تغییر شرایط محیطی در حین آزمایش (مثلاً تغییر راستای آهنربای دوم در هنگام تنظیم کردن فاصله اولیه میان دو آهنربا در فواصل اولیه مختلف آهنربا)، اندازه‌گیری مقدار بیشینه ولتاژ تولیدی خطا دارد و این خطا به پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ تولیدی نیز منتقل می‌گردد و حتی ممکن است در روند نمودارهای آن‌ها تاثیر بگذارد. بنابراین، برای مقایسه دقیق‌تر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ از نتایج نظری استفاده خواهد شد که در بخش ۷-۵ ارائه می‌شوند.

شکل‌های ۵-۱۶، ۵-۱۷ و ۵-۱۸، اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان الکتریکی اندازه‌گیری شده را برای فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا، به ترتیب در شتاب پایه‌های ۰/۶، ۱ و ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه نشان می‌دهند.

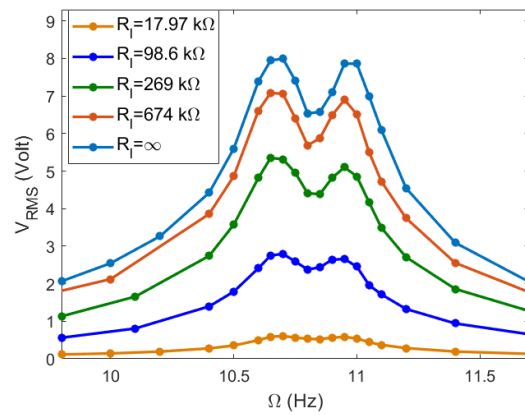


شکل ۵-۱۶- اثر مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.

همان‌طور که در حالت عدم وجود آهنربا نیز مشاهده شد، افزایش مقاومت الکتریکی، ولتاژ تولیدی را افزایش می‌دهد. در این جا هم توان بیشینه همانند حالت عدم وجود آهنربا در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم رخ می‌دهد. در شکل ۵-۱۹، اثر مقاومت الکتریکی بر پهنای باند ولتاژ اندازه‌گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا

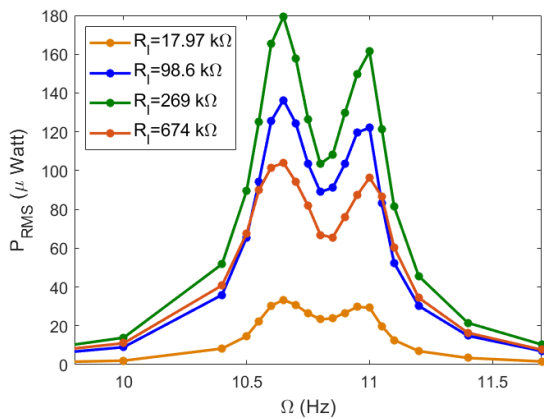


(ب) توان موثر اندازه گیری شده.

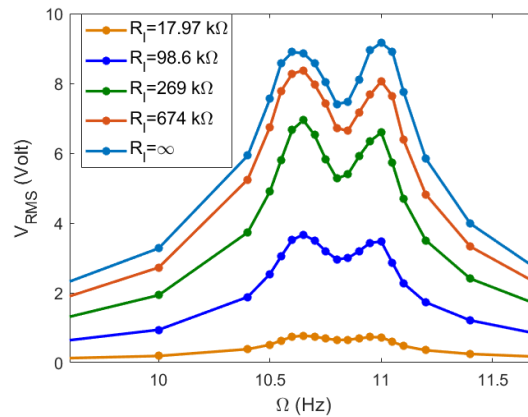


(الف) ولتاژ موثر اندازه گیری شده.

شکل ۵-۱۷- اثر مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان اندازه گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.



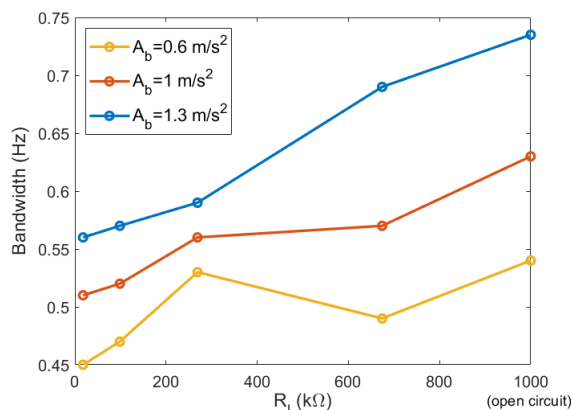
(ب) توان موثر اندازه گیری شده.



(الف) ولتاژ موثر اندازه گیری شده.

شکل ۵-۱۸- اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر ولتاژ و توان اندازه گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه.

نمایش داده شده، که نشان می دهد در این فاصله اولیه آهنربا، حالت مدار باز و یا مقاومت های الکتریکی بزرگتر، پهنای باند وسیع تری دارند.



شکل ۵-۱۹- اثر مقدار مقاومت الکتریکی بر پهنای باند ولتاژ اندازه گیری شده در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا.

۴-۵-۵ صحت‌سنجی نتایج مدل‌سازی ریاضی در حالت وجود آهنربا به وسیله نتایج تجربی

در شکل‌های ۵-۲۰ تا ۵-۲۴، نتایج مدل‌سازی ریاضی در حالت وجود آهنربا شامل راه‌حل عددی مدل غیرخطی و راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲، در شرایط مختلف شتاب پایه، فاصله اولیه آهنربا و مقدار مقاومت الکتریکی، به وسیله نتایج تجربی صحت‌سنجی می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در همه موارد، نتایج نظری دقت بالایی در برابر نتایج تجربی دارند.

خطای میان نتایج حاصل از حل عددی مدل غیرخطی و نتایج تجربی در جدول‌های ۵-۵ تا ۹-۵ ارائه شده است. برخی از مهم‌ترین عواملی که سبب خطای میان نتایج نظری و تجربی در حالت وجود آهنربا می‌شوند، عبارت است از:

۱. به دلیل این که در پایه سیستم ساخته شده برای آزمایش، از شیار برای نصب آهنربای دوم استفاده شده، ممکن است آهنربای دوم به طور کاملاً دقیق و ایده‌آل روبه‌روی آهنربای اول قرار نگیرد و باعث تغییر اندکی در مقدار نیروی مغناطیسی شود.

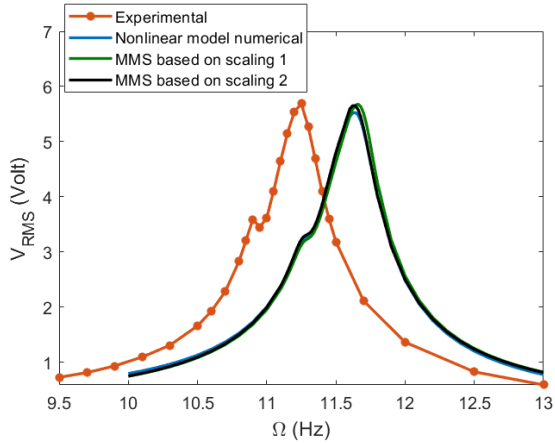
۲. نیروی مغناطیسی میان دو آهنربا که به وسیله دستگاه تست کشش اندازه‌گیری شده، ممکن است دارای خطای اندازه‌گیری باشد.

۳. نیروی غیرخطی مغناطیسی میان دو آهنربا که در شکل ۴-۳ نشان داده شده، ممکن است توسط میدان‌های مغناطیسی موجود در اطراف محل آزمایش و در حین ارتعاش، دچار تغییراتی شود.

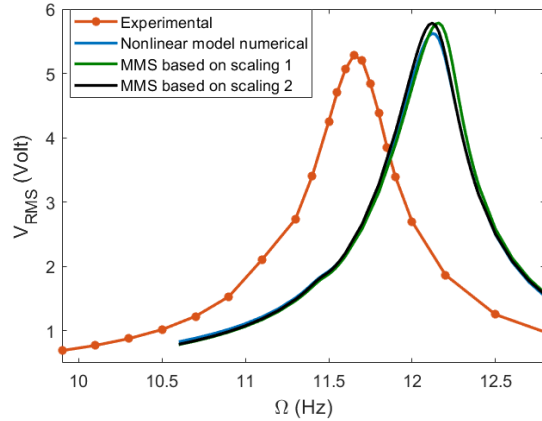
۴. در آزمایش، نیروی مغناطیسی میان دو آهنربا به دلیل چرخشی که آهنربای اول در حین ارتعاش نسبت به آهنربای دوم دارد، اندکی تغییر می‌کند که در مدل‌سازی لحاظ نشده است.

۵. آهنرباها به صورت نقطه‌ای مدل شده‌اند که در حالت دقیق باید صفحه‌ای مدل شوند.

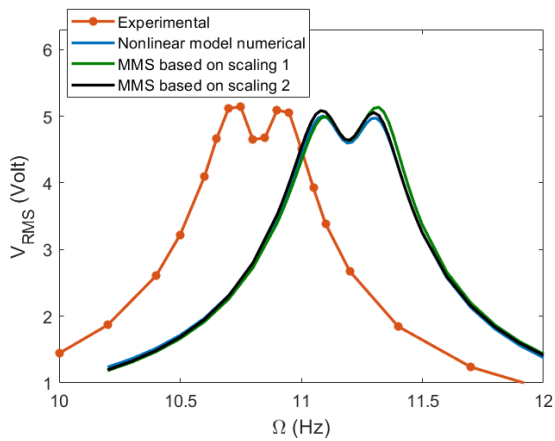
۶. قرار دادن آهنربای دوم در فاصله مشخصی از آهنربای اول به طور کاملاً دقیق امکان‌پذیر نیست و دارای خطای اندازه‌گیری است.



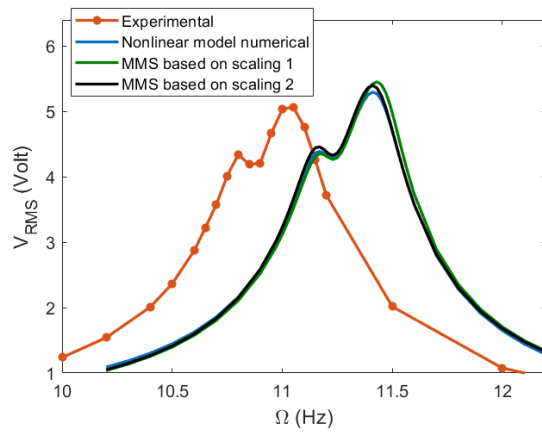
(ب) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.35$ cm



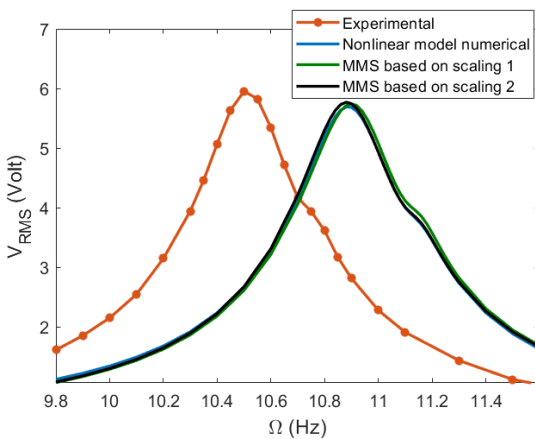
(الف) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 1.97$ cm



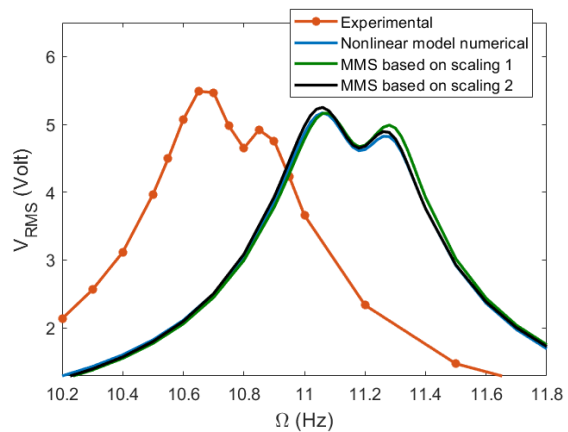
(د) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.67$ cm



(ج) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.55$ cm

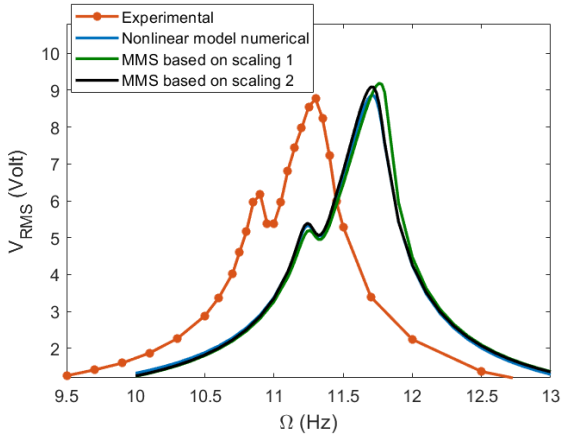


(و) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.93$ cm

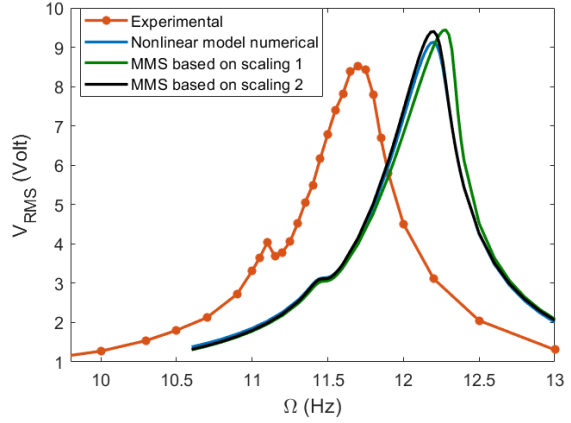


(ه) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.71$ cm

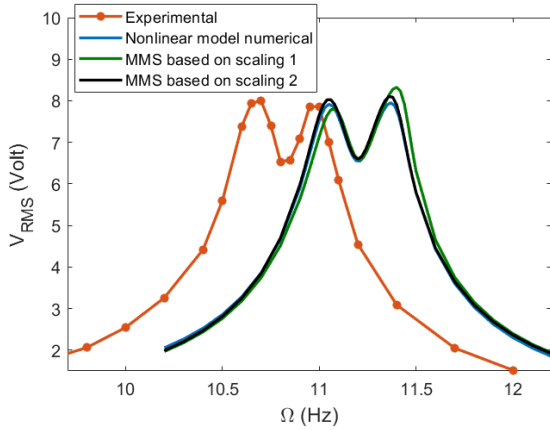
شکل ۵-۲۰- مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در فواصل اولیه مختلف آهنربا در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز.



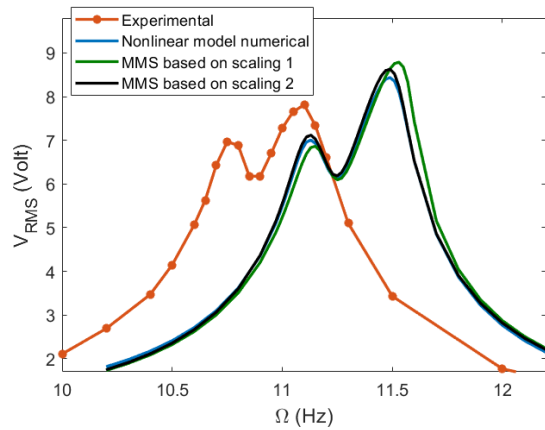
(ب) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.35$ cm



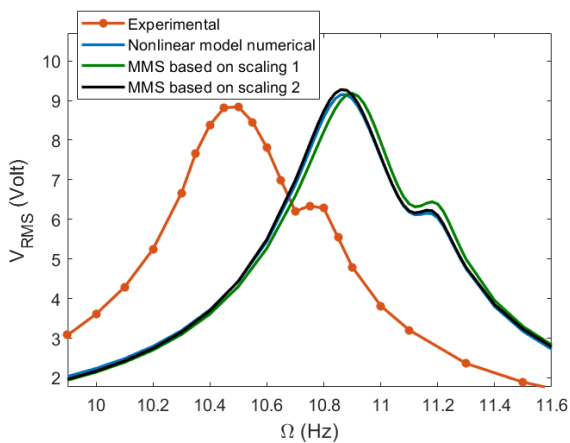
(الف) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 1.97$ cm



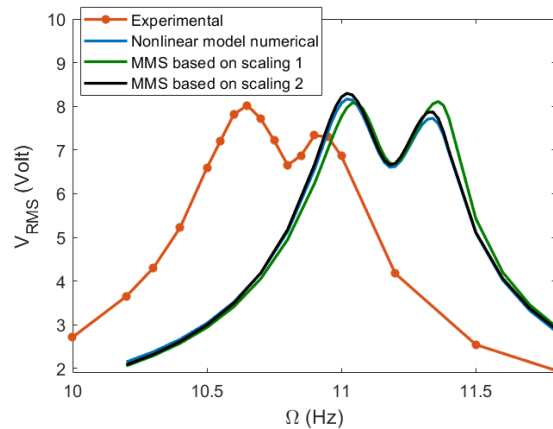
(د) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.67$ cm



(ج) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.55$ cm

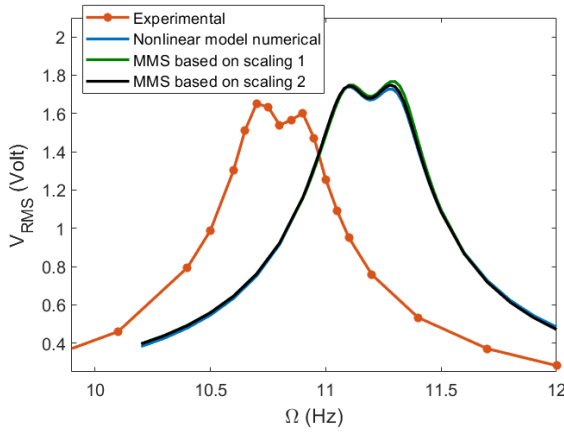


(و) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.93$ cm

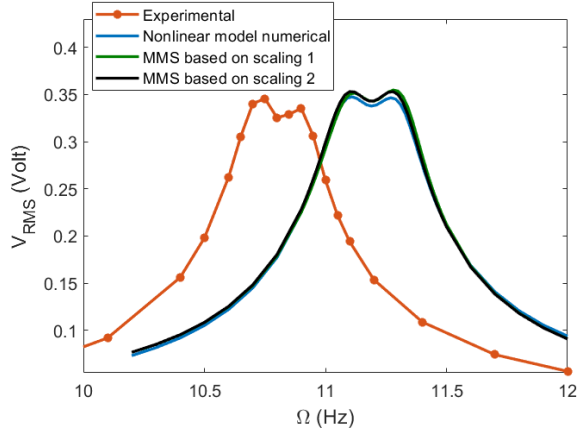


(ه) فاصله اولیه آهنربا، $D_m = 2.71$ cm

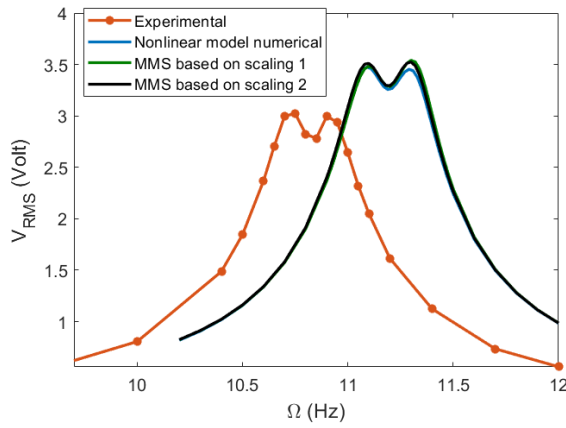
شکل ۵-۲۱- مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در فواصل اولیه مختلف آهنربا در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت مدار باز.



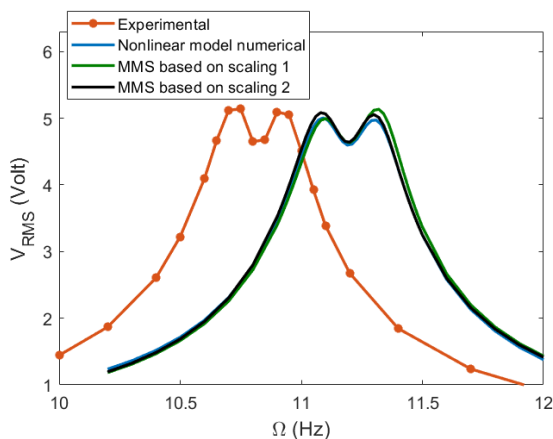
(ب) مقاومت الکتریکی، $R_l = 98.6 \text{ k}\Omega$



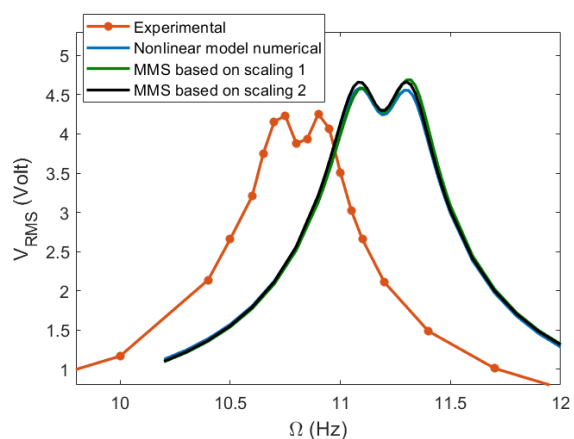
(الف) مقاومت الکتریکی، $R_l = 17.97 \text{ k}\Omega$



(ج) مقاومت الکتریکی، $R_l = 269 \text{ k}\Omega$

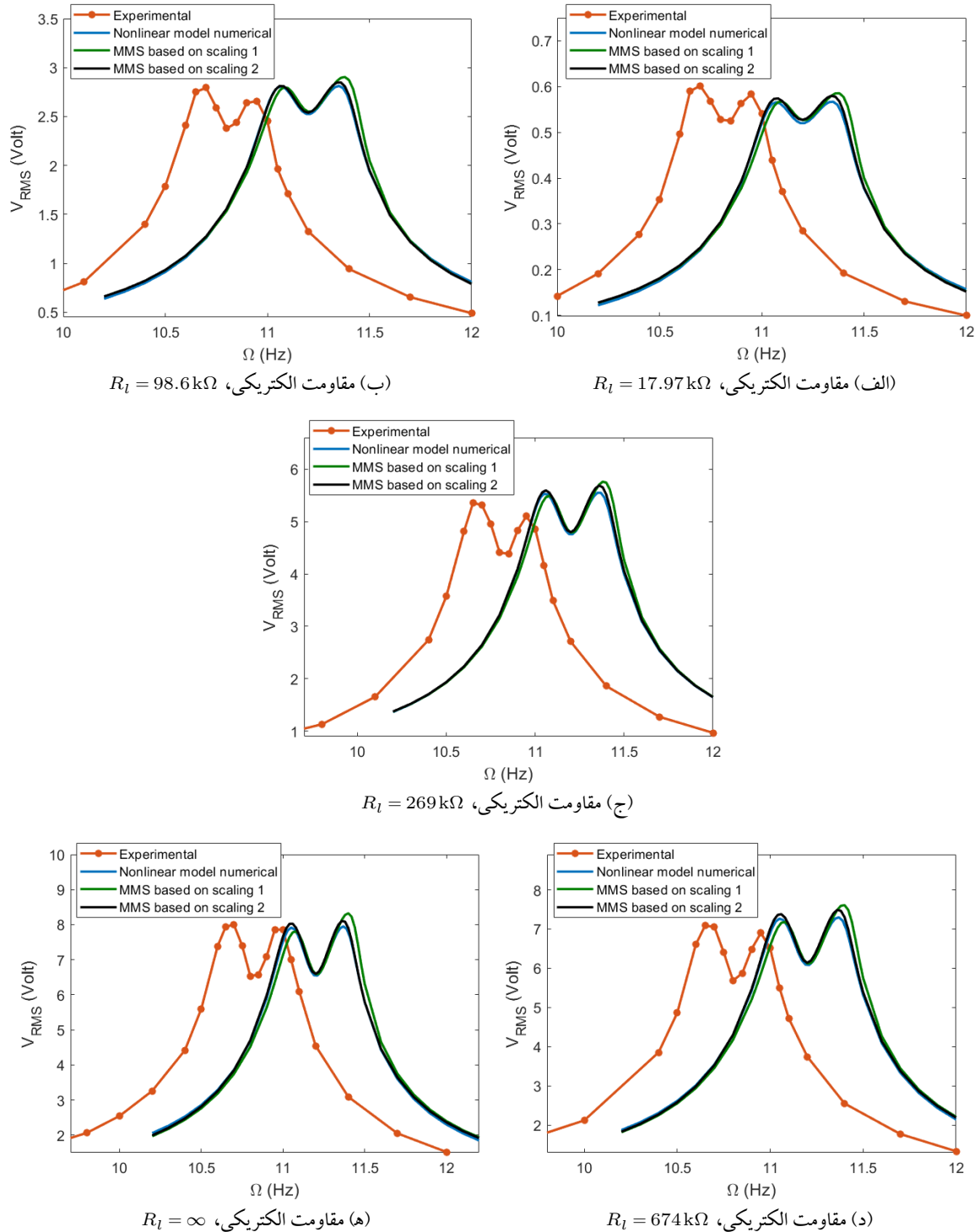


(ه) مقاومت الکتریکی، $R_l = \infty$

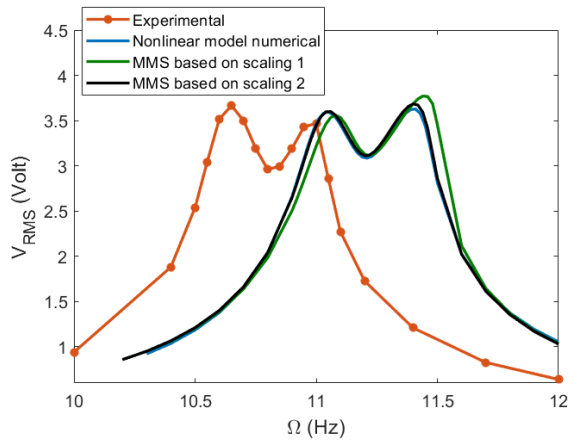


(د) مقاومت الکتریکی، $R_l = 674 \text{ k}\Omega$

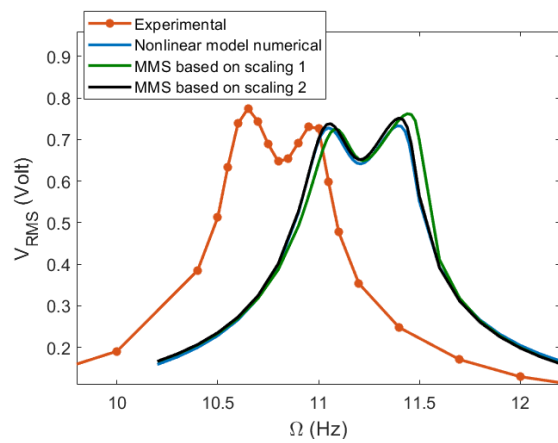
شکل ۵-۲۲ - مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در مقاومت های الکتریکی مختلف در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.



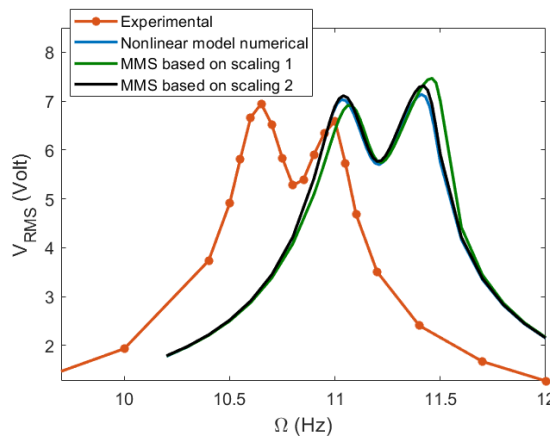
شکل ۵-۲۳- مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در مقاومت های الکتریکی مختلف در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.



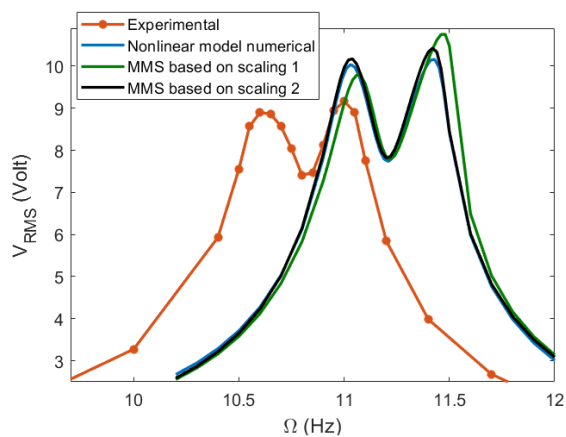
(ب) مقاومت الکتریکی، $R_l = 98.6 \text{ k}\Omega$



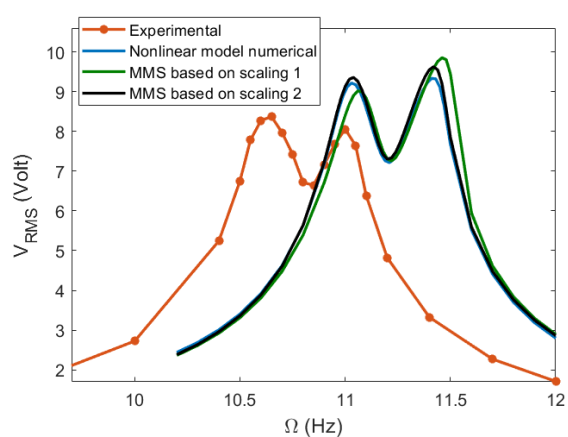
(الف) مقاومت الکتریکی، $R_l = 17.97 \text{ k}\Omega$



(ج) مقاومت الکتریکی، $R_l = 269 \text{ k}\Omega$



(ه) مقاومت الکتریکی، $R_l = \infty$



(د) مقاومت الکتریکی، $R_l = 674 \text{ k}\Omega$

شکل ۵-۲۴ - مقایسه بین نتایج تجربی، راه حل عددی مدل غیرخطی، راه حل های مقیاس های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری های ۱ و ۲ در مقاومت های الکتریکی مختلف در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱/۳ متر بر معذور ثانیه.

جدول ۵-۵ - درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و حل عددی مدل غیرخطی در حالت مدار باز و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.

درصد خطای قله بیشینه	درصد خطای قله بیشینه	فاصله اولیه آهنربا (cm)
+۴/۰۳	+۶/۴۸	۱/۹۷
+۳/۴۷	-۲/۸۰	۲/۳۵
+۳/۲۶	+۴/۴۸	۲/۵۵
+۳/۸۵	-۵/۸۱	۲/۷۱
+۳/۶۲	-۴/۴۲	۲/۹۳

جدول ۶-۵ - درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و حل عددی مدل غیرخطی در حالت مدار باز و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.

درصد خطای قله بیشینه	درصد خطای قله بیشینه	فاصله اولیه آهنربا (cm)
+۴/۲۷	+۷/۱۲	۱/۹۷
+۳/۷۲	+۱/۰۶	۲/۳۵
+۳/۵۱	+۸/۰۱	۲/۵۵
+۳/۴۷	+۱/۸۲	۲/۷۱
+۳/۴۳	+۳/۴۶	۲/۹۳

جدول ۷-۵ - درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و راه حل عددی مدل غیرخطی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.

درصد خطای قله بیشینه	درصد خطای قله بیشینه	مقاومت الکتریکی (k Ω)
+۳/۳۵	+۰/۵۵	۱۷/۹۷
+۳/۸۳	+۵/۳۳	۹۸/۶
+۳/۱۶	+۱۴/۹۱	۲۶۹
+۳/۵۸	+۷/۱۰	۶۷۴
+۳/۱۶	-۲/۵۹	∞

جدول ۵-۸- درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و راه حل عددی مدل غیرخطی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.

درصد خطای قله بیشینه	درصد خطای فرکانس متناظر با قله بیشینه	مقاومت الکتریکی ($k\Omega$)
+۳/۴۶	-۵/۹۸	۱۷/۹۷
+۳/۴۶	+۰/۴۷	۹۸/۶
+۳/۷۶	+۳/۳۱	۲۶۹
+۳/۷۶	+۲/۵۱	۶۷۴
+۳/۸۴	+۱/۱۴	∞

جدول ۵-۹- درصد خطای قله بیشینه ولتاژ و فرکانس متناظر با آن، میان نتایج تجربی و راه حل عددی مدل غیرخطی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و شتاب پایه ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه در حالت وجود آهنربا.

درصد خطای قله بیشینه	درصد خطای فرکانس متناظر با قله بیشینه	مقاومت الکتریکی ($k\Omega$)
+۳/۷۶	-۵/۹۹	۱۷/۹۷
+۳/۷۶	-۱/۹۱	۹۸/۶
+۳/۵۷	+۱/۲۲	۲۶۹
+۳/۵۷	+۱۰/۱۱	۶۷۴
+۳/۹۱	+۱۰/۸۷	∞

همان طور که قبلا مشاهده شد، نتایج نظری دقت خوبی در برابر نتایج تجربی دارند و عوامل ایجاد کننده خطا که نام برده شد، تغییر قابل توجهی در نتایج تجربی ایجاد نمی کنند. بنابراین با توجه به بخش های ۲-۵-۵ و ۴-۵-۵، مدل سازی ریاضی انجام شده به وسیله نتایج تجربی صحت سنجی گردید و از دقت بالایی برخوردار است.

۵-۶ مقایسه میان نتایج حل عددی مدل غیرخطی و مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۲ و ۱

در این بخش نتایج حاصل از راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ در برابر راه‌حل عددی مدل غیرخطی مقایسه می‌شوند. در شکل‌های ۵-۲۰ و ۵-۲۱، راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ در برابر نتایج حل عددی مدل غیرخطی در فواصل اولیه مختلف آهنربا رسم شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲، فرکانس‌های متناظر با قله‌ها را دقیق‌تر از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ نسبت به حل عددی مدل غیرخطی پیش‌بینی می‌کند. با افزایش شتاب پایه از ۰/۶ تا ۱ متر بر مجذور ثانیه، دقت راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ در قله‌ها و فرکانس‌های متناظر با آن نسبت به حل عددی مدل غیرخطی کاهش می‌یابد، در حالی که در همین شرایط، راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ دقت بسیار بالایی دارد. نکته دیگری که در شکل‌های ۵-۲۰ و ۵-۲۱ مشاهده می‌شود، با کاهش فاصله اولیه آهنربا، فرکانس‌های متناظر با قله‌ها (یا به عبارت دیگر فرکانس طبیعی) افزایش می‌یابند و برعکس (همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در شتاب پایه‌های کوچک می‌توان فرض کرد که سیستم رفتار خطی دارد و فرکانس طبیعی برای آن تعریف نمود). در حل مقیاس‌های زمانی چندگانه، هرچه پارامتر تنظیم‌کننده در تشدیدهای داخلی و اولیه کوچکتر باشد (با توجه به رابطه (۳-۳۸))، دقت پاسخ نتیجه شده از آن بالاتر است. همان‌طور که قبلاً اشاره گردید، اگر فرکانس تحریک سیستم (Ω) نزدیک یا برابر با فرکانس طبیعی اول سیستم (ω_1) باشد، پارامتر تنظیم‌کننده تشدید اولیه (σ_2) کمترین مقدار خود را خواهد داشت. هم‌چنین، برای فواصل اولیه آهنربای نزدیک ۲/۶۷ سانتی‌متر، پارامتر تنظیم‌کننده در تشدید داخلی (σ_1) کمینه خواهد بود (با توجه به جدول ۵-۴). شکل‌های ۵-۲۲، ۵-۲۳ و ۵-۲۴، نتایج حاصل از راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ و حل عددی مدل غیرخطی را برای مقاومت‌های الکتریکی مختلف به ترتیب در شتاب پایه‌های ۰/۶، ۱ و ۱/۳ متر بر مجذور ثانیه، نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر مقاومت الکتریکی، پاسخ فرکانسی به دست آمده توسط راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ به پاسخ فرکانسی به دست آمده از راه‌حل مرجع یعنی حل عددی مدل غیرخطی نزدیک‌تر است. نتایج حاصل از راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ در همین شرایط، خطای بزرگی مخصوصاً در شتاب پایه‌های بالاتر دارد.

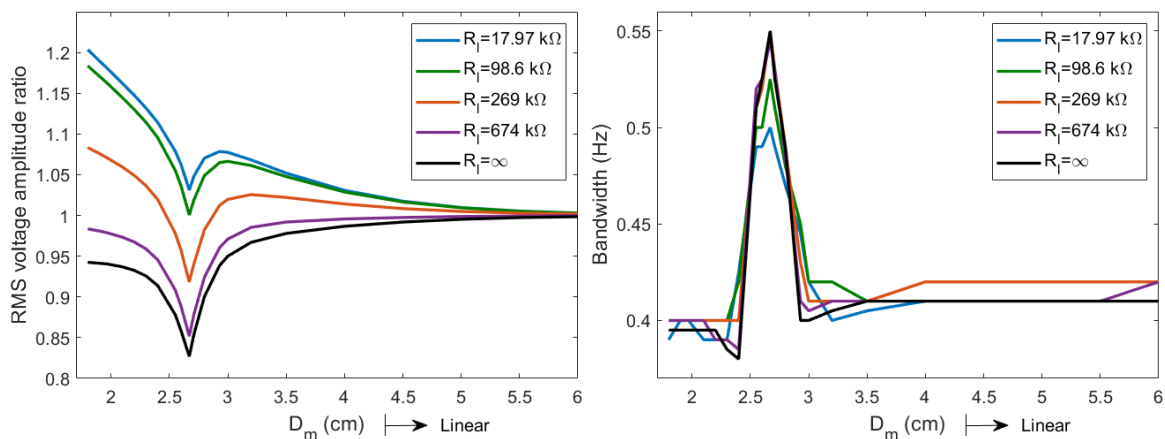
بنابراین، راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ در مقایسه با راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱، نسبت به حل عددی مدل غیرخطی، در هر شرایطی از فاصله اولیه آهنربا، شتاب پایه و مقاومت الکتریکی دقیق‌تر است. دلیل این امر آن است که عملیات مقیاس‌گذاری رابطه (۳-۳۲) در مقایسه با رابطه (۳-۷)، دقیق‌تر انجام شده است.

در نتیجه، روش حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ (بخش ۳-۱-۲) که در این پژوهش نسبت به راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ ارائه شده و به کمک آن می‌توان معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی دارای عبارت‌های غیرخطی مرتبه دوم و سوم را با تقریب مرتبه اول به وسیله روش تحلیلی تقریبی مقیاس‌های زمانی چندگانه حل نمود، دقت بسیار بالایی در برابر حل مرجع یعنی حل عددی مدل غیرخطی دارد. بنابراین از راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ می‌توان به جای حل عددی مدل غیرخطی استفاده نمود که دارای ویژگی‌های دقت بالا و سرعت محاسبه بسیار زیاد در برابر حل عددی است.

۷-۵ مقایسه میان حالت‌های وجود و عدم وجود آهنربا در برداشت انرژی

در بخش ۵-۵، نتایج تجربی ارائه شد و به وسیله آن‌ها مدل‌سازی ریاضی انجام شده صحت‌سنجی گردید. در این بخش، اثر اضافه شدن آهنربای دوم بر سیستم برداشت انرژی پیشنهادی، به طور دقیق‌تری با استفاده از نتایج نظری نمودارهای ۵-۵ و ۵-۱۹، بررسی می‌شود. تمامی شکل‌های ارائه شده در این بخش، به وسیله راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ به دست آورده شده‌اند. در این جا برای نمایش دادن حالت مدار باز در نمودارها از مقاومت الکتریکی ۱۰۰۰ کیلو اهم استفاده شده و هم‌چنین فاصله اولیه ۶ سانتی‌متر میان دو آهنربا برای اشاره به حالت عدم وجود آهنربا به کار رفته است.

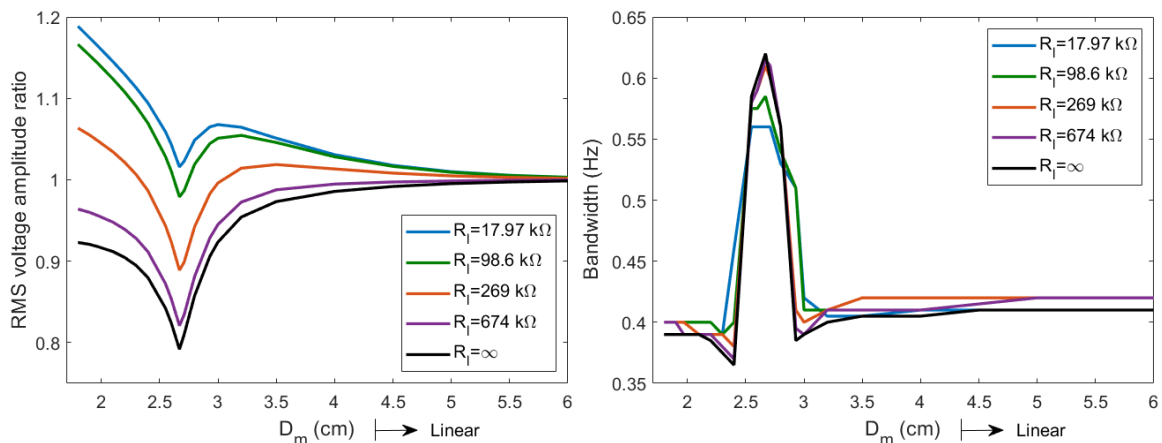
شکل‌های ۵-۲۵ و ۵-۲۶، اثر فاصله اولیه میان دو آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ را در مقاومت‌های الکتریکی مختلف به ترتیب در شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه نمایش می‌دهند.



(ب) نسبت دامنه ولتاژ موثر محاسبه شده.

(الف) پهنای باند ولتاژ موثر محاسبه شده.

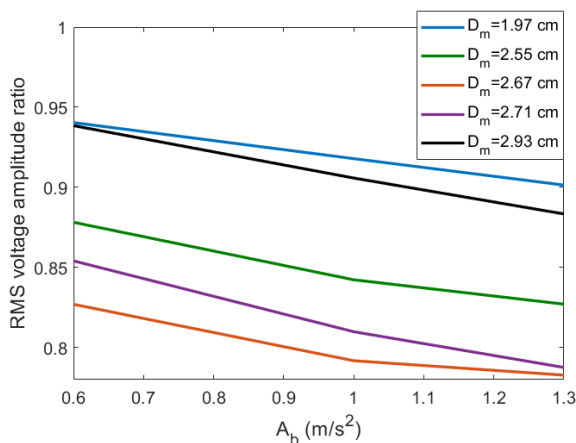
شکل ۵-۲۵- اثر فاصله اولیه آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده، در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.



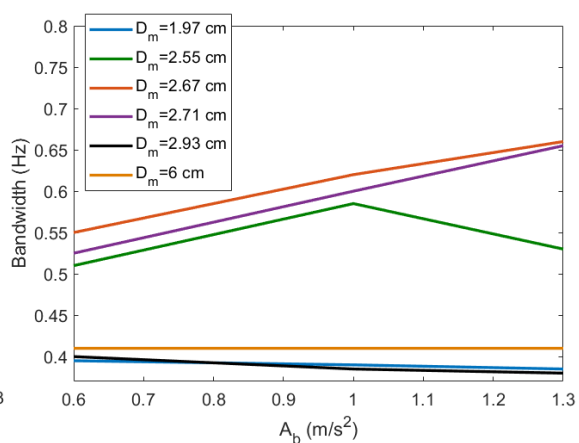
شکل ۵-۲۶- اثر فاصله اولیه آهنربا بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ موثر محاسبه شده. در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر مقداری از مقاومت الکتریکی و شتاب پایه، پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا، به ترتیب بیشینه و کمینه است. به عبارت دیگر، فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر، دارای بزرگترین پهنای باند و کمترین نسبت دامنه ولتاژ در میان سایر فواصل آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا است. اگر سیستم برداشت انرژی در حالت وجود آهنربا دارای پهنای باند وسیع‌تر نسبت به حالت عدم وجود آهنربا و هم‌چنین نسبت دامنه ولتاژ بزرگتر از یک داشته باشد، در این شرایط افزودن آهنربا سبب بهبود یافتن سیستم برداشت می‌شود. در صورتی که هدف فقط افزایش پهنای باند در هر مقداری از شتاب پایه و مقاومت الکتریکی است، فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا، بهترین انتخاب است. اگر چه که نسبت دامنه ولتاژ آن به مقدار شتاب پایه و مقاومت الکتریکی بستگی دارد. به عنوان مثال در حالت مدار باز و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه، مقدار پهنای باند نسبت به حالت عدم وجود آهنربا به مقدار ۵۱/۲۲٪ افزایش یافته در حالی که نسبت دامنه ولتاژ به میزان ۲۰/۸۲٪ کاهش می‌یابد. اگر مقدار مقاومت الکتریکی کمتر از ۹۸/۶ کیلو اهم و شتاب پایه برابر ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه باشد، قله بیشینه ولتاژ در هر فاصله اولیه آهنربا از حالت وجود آهنربا، مقدار برابر یا بزرگتر از قله ولتاژ در حالت عدم وجود آهنربا خواهد داشت (نسبت دامنه ولتاژ در این حالت برابر یا بزرگتر از یک خواهد بود). در مقاومت الکتریکی ۹۸/۶ کیلو اهم و فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر، پهنای باند نسبت به حالت عدم وجود آهنربا ۲۵٪ افزایش می‌یابد، در حالی که مقدار قله ولتاژ نسبت به حالت عدم وجود آهنربا تقریباً ثابت می‌ماند. در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر، اگر شتاب پایه و مقاومت الکتریکی به ترتیب برابر ۱ متر بر مجذور ثانیه و ۱۷/۹۷ کیلو اهم باشند، پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ به ترتیب به میزان ۳۶/۵۹٪ و ۱/۶٪، نسبت به حالت عدم وجود آهنربا افزایش می‌یابند.

اثر شتاب پایه بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ به ترتیب برای مقاومت‌های الکتریکی بی‌نهایت (حالت مدار باز) و ۱۷/۹۷ کیلو اهم، در شکل‌های ۵-۲۷ و ۵-۲۸ ارائه شده است.

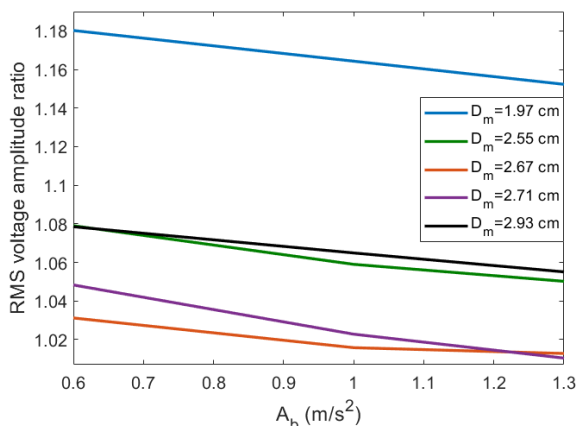


(ب) نسبت دامنه ولتاژ موثر محاسبه شده.

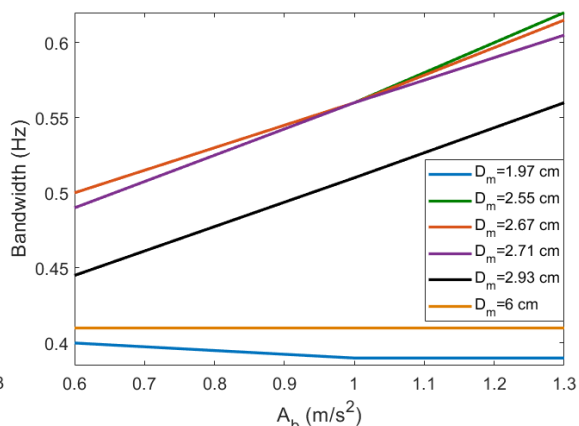


(الف) پهنای باند ولتاژ موثر محاسبه شده.

شکل ۵-۲۷ - اثر شتاب پایه بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در مقاومت الکتریکی بی‌نهایت (حالت مدار باز).



(ب) نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده.



(الف) پهنای باند ولتاژ محاسبه شده.

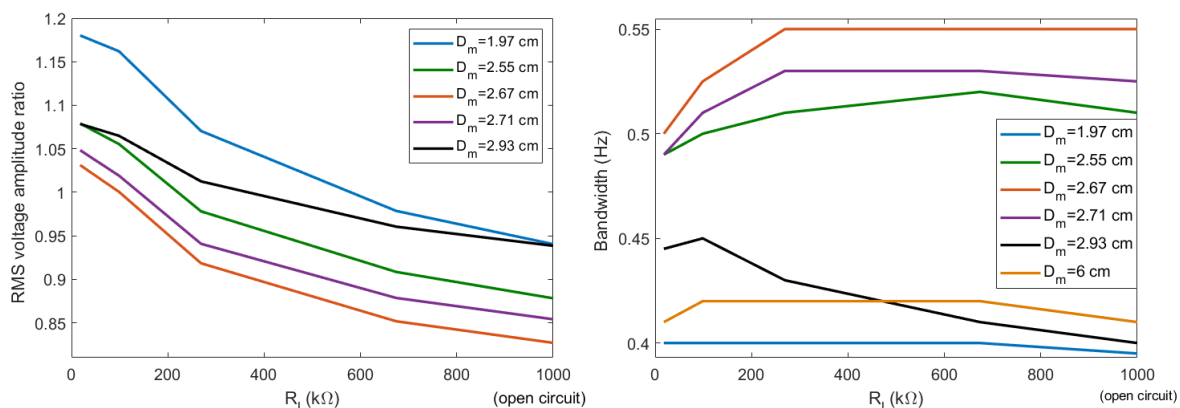
شکل ۵-۲۸ - اثر شتاب پایه بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم.

با توجه به شکل‌های ۵-۲۷ و ۵-۲۸، افزایش شتاب پایه سبب کاهش نسبت دامنه ولتاژ در هر فاصله اولیه آهنربا که در راهنمای^۱ شکل‌ها نمایش داده شده و در مقاومت‌های بی‌نهایت (حالت مدار باز) و ۱۷/۹۷ کیلو اهم می‌شود. فواصل اولیه ۱/۹۷ و ۲/۶۷ سانتی متر، به ترتیب دارای بیشترین و کمترین نسبت دامنه ولتاژ در میان سایر فواصل اولیه آهنربا هستند. قله بیشینه ولتاژ در حالت وجود آهنربا، به ترتیب مقدار کمتر و بیشتری در مقاومت‌های الکتریکی بی‌نهایت و ۱۷/۹۷ کیلو اهم، نسبت به حالت عدم وجود آهنربا در هر شتاب پایه‌ای دارد. پهنای باند در فواصل اولیه ۲/۶۷ و ۲/۷۱ سانتی متر، در هر دو مقاومت الکتریکی، با افزایش شتاب پایه افزایش می‌یابد. رفتار پهنای باند در فواصل اولیه ۲/۵۵ و ۲/۹۳ سانتی متر، در مقاومت‌های بی‌نهایت و ۱۷/۹۷ کیلو اهم، در آن شکل‌ها قابل مشاهده است. پهنای باند در فاصله اولیه ۱/۹۷ سانتی متر، نسبت به تغییرات شتاب پایه در هر دو مقاومت الکتریکی، تقریباً ثابت است. در حالت عدم وجود آهنربا (همان‌طور که قبلاً اشاره گردید، در نمودارها با نماد $D_m = 6 \text{ cm}$ نمایش داده می‌شود)، به دلیل رفتار خطی

¹Legend

آن، پهنای باند مستقل از شتاب پایه است.

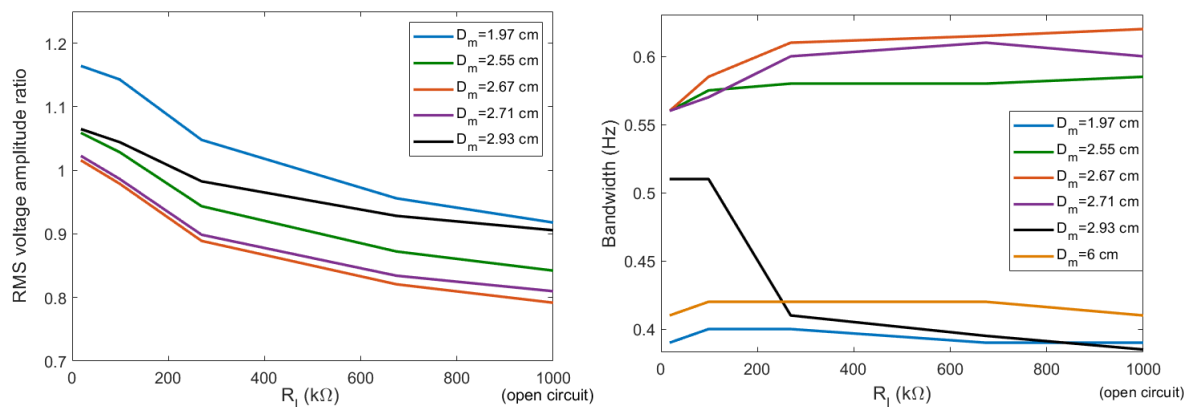
شکل های ۵-۲۹ و ۵-۳۰، اثر مقاومت الکتریکی بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ را در شتاب پایه های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه، نشان می دهند. با مقایسه این دو شکل با یکدیگر مشاهده می شود که در هر فاصله اولیه میان دو آهنربا، افزایش شتاب پایه بر رفتار نمودار نسبت دامنه ولتاژ بر حسب مقاومت الکتریکی تاثیری ندارد.



(ب) نسبت دامنه ولتاژ موثر محاسبه شده.

(الف) پهنای باند ولتاژ موثر محاسبه شده.

شکل ۵-۲۹- اثر مقاومت الکتریکی بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.



(ب) نسبت دامنه ولتاژ موثر محاسبه شده.

(الف) پهنای باند ولتاژ موثر محاسبه شده.

شکل ۵-۳۰- اثر مقاومت الکتریکی بر پهنای باند و نسبت دامنه ولتاژ محاسبه شده در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.

فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی متر میان دو آهنربا و اطراف آن، یعنی فواصل ۲/۵۵ و ۲/۷۱ سانتی متر، بیشترین پهنای باند و کمترین نسبت دامنه ولتاژ را در میان سایر فواصل آهنربا دارند (این نتیجه از شکل های ۵-۲۵ و ۵-۲۶ نیز قابل مشاهده است). فاصله اولیه ۱/۹۷ سانتی متر میان دو آهنربا، در هر دو شتاب پایه و در هر مقاومت الکتریکی، پهنای باند کمتری در میان سایر فواصل آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا دارد، گرچه نسبت دامنه ولتاژ آن در میان سایر فواصل آهنربا بیشینه است. برای مثال در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه و مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم، پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ

در فاصله اولیه ۱/۹۷ سانتی‌متر نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، به ترتیب به میزان ۴/۸۸٪ و ۱۶/۴٪ کاهش و افزایش می‌یابند. فاصله اولیه ۲/۹۳ سانتی‌متر میان دو آهنربا، در شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه و مقاومت‌های الکتریکی کمتر از ۳۵۰ کیلو اهم و هم‌چنین در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه و مقاومت‌های کمتر از ۲۰۰ کیلو اهم، پهنای باند و ولتاژ بیشینه بزرگتری نسبت به حالت عدم وجود آهنربا دارد.

با توجه به بخش ۵-۵، توان بهینه در هر دو حالت وجود و عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم برداشت می‌شود. بعد از این مقاومت، توان بیشینه در مقاومت‌های ۶۷۴ و ۹۸/۶ کیلو اهم، اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل‌های ۵-۲۹ و ۵-۳۰، درصد تغییرات پهنای باند و مقدار قله بیشینه ولتاژ نسبت به شرایط یکسان در حالت عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم که توان بهینه از آن برداشت می‌شود، به ترتیب در جدول‌های ۵-۱۰ و ۵-۱۱ برای شتاب پایه‌های ۰/۶ و ۱ متر بر مجذور ثانیه ارائه شده است.

جدول ۵-۱۰ - درصد تغییرات پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ در فواصل اولیه مختلف آهنربا نسبت به شرایط یکسان در حالت عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم و شتاب پایه ۰/۶ متر بر مجذور ثانیه.

فاصله اولیه آهنربا (cm)	درصد تغییرات پهنای باند	درصد تغییرات قله بیشینه ولتاژ
۱/۹۷	-۴/۷۶	+۷
۲/۵۵	+۲۱/۴۳	-۲/۱۹
۲/۶۷	+۳۰/۹۵	-۸/۱۶
۲/۷۱	+۲۶/۱۹	-۵/۹۲
۲/۹۳	+۲/۳۸	+۱/۲

جدول ۵-۱۱ - درصد تغییرات پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ در فواصل اولیه مختلف آهنربا نسبت به شرایط یکسان در حالت عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه.

فاصله اولیه آهنربا (cm)	درصد تغییرات پهنای باند	درصد تغییرات قله بیشینه ولتاژ
۱/۹۷	-۴/۷۶	+۴/۸
۲/۵۵	+۳۸/۱	-۵/۶۴
۲/۶۷	+۴۵/۲۴	-۱۱/۱
۲/۷۱	+۴۲/۸۶	-۱۰/۱۳
۲/۹۳	-۲/۳۸	-۱/۷۳

فاصله اولیه ۱/۹۷ سانتی‌متر، بهترین انتخاب برای داشتن توان بهینه با قله بیشینه بزرگتر نسبت به حالت عدم وجود

آهنربا است، ولی پهنای باند آن نسبت به حالت عدم وجود آهنربا کاهش می‌یابد. در فاصله اولیه $2/93$ سانتی‌متر، افزایش شتاب پایه از مقدار $0/6$ به مقدار 1 متر بر مجذور ثانیه، سبب کاهش پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ یا توان بهینه نسبت به حالت عدم وجود آهنربا می‌گردد. در فاصله اولیه $2/67$ سانتی‌متر و فواصل اطراف آن یعنی $2/55$ و $2/71$ سانتی‌متر، پهنای باند نسبت به سایر فواصل آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا بسیار وسیع‌تر بوده، در حالی که قله بیشینه ولتاژ کمترین مقدار خود را در میان آن‌ها دارد.

با مقایسه جدول‌های $5-10$ و $5-11$ ، مشاهده می‌شود که در اکثر موارد، اگر پهنای باند نسبت به حالت عدم وجود آهنربا افزایش یافته باشد، قله بیشینه ولتاژ یا توان، کاهش می‌یابد و رفتار پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ یا توان نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، معمولاً عکس یکدیگر است. بنابراین، بسته به هدف مورد نظر لازم است بهینه‌سازی میان این دو پارامتر صورت گیرد، مثلاً مقدار شتاب پایه، مقاومت الکتریکی و فاصله اولیه آهنربا به گونه‌ای انتخاب شوند که پهنای باند و ولتاژ یا توان بیشینه هر دو همزمان نسبت به حالت عدم وجود آهنربا افزایش یابند، یا پهنای باند افزایش یابد ولی مقدار بیشینه ولتاژ یا توان تا حد امکان کمتر کاهش یابد. مثلاً اگر هدف افزایش پهنای باند باشد، فاصله اولیه $2/55$ سانتی‌متر، پهنای باند وسیع‌تری در برابر کاهش کمتری از قله بیشینه ولتاژ، نسبت به سایر فواصل آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا دارد (اندازه نسبت تغییرات پهنای باند به تغییرات قله بیشینه ولتاژ در آن، بزرگتر است).

بنابراین می‌توان گفت که بهترین شرایط برای برداشت توان بهینه در سیستم پیشنهادی با هدف افزایش پهنای باند، انتخاب فاصله اولیه آهنربا $2/55$ سانتی‌متر و مقاومت الکتریکی 269 کیلو اهم است که پهنای باند وسیع‌تری به همراه کاهش کمتری از قله بیشینه توان، نسبت به حالت عدم وجود آهنربا به دست می‌دهد. مثلاً در شتاب پایه 1 متر بر مجذور ثانیه، پهنای باند و مقدار قله بیشینه ولتاژ نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، به ترتیب به میزان $38/1\%$ و $5/64\%$ افزایش و کاهش می‌یابند.

۵-۸ جمع‌بندی

در این فصل نتایج پژوهش حاضر شامل نتایج نظری و تجربی ارائه شد. در ابتدا، به منظور استخراج دقیق‌ترین شکل مودهای سیستم برای استفاده در حل مودهای فرضی، مدل‌سازی اجزای محدود سیستم پیشنهادی در نرم‌افزار آباکوس انجام شد و فرکانس‌های طبیعی و مودشپ‌های آن استخراج شدند. سپس با داشتن مودشپ‌ها، مقادیر پارامترهای به کار رفته در معادلات حرکت سیستم تعیین شدند. در ادامه اثر چسب‌های دو طرفه در انتقال کرنش محوری از تیر بالا به وصله‌های پیزوالکتریک بررسی شد و مشخص گردید که چسب‌های دو طرفه باعث می‌شوند که بخشی از کرنش محوری تیر بالا به وصله‌های پیزوالکتریک منتقل نشود و به هدر برود. در ادامه نتایج تجربی در دو حالت وجود و عدم وجود آهنربای دوم ارائه شدند و به وسیله آن‌ها، نتایج نظری حاصل از مدل‌سازی ریاضی صحت‌سنجی شدند.

پاسخ فرکانسی در حالت وجود آهنربا معمولاً دارای دو قله در اطراف فرکانس طبیعی اول است که نشان‌دهنده رخ دادن تشدید داخلی در سیستم و ترکیب شدن مودهای اول و دوم است. در انتهای بخش، راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ در برابر حل عددی مدل غیرخطی مقایسه شدند. مقایسه نشان داد که راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ نسبت به راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱، دقیق‌تر می‌تواند قله‌ها در پاسخ فرکانسی به همراه فرکانس‌های متناظر با آن را در برابر حل مرجع یعنی حل عددی مدل غیرخطی پیش‌بینی کند. نهایتاً در انتهای این فصل، اثر اضافه شدن آهنربا به سیستم پیشنهادی به صورت جامع بررسی گردید و مشخص شد که با طراحی پارامترهای شتاب پایه، مقاومت الکتریکی و فاصله اولیه آهنربا در حالت وجود آهنربا می‌توان پهنای باند یا قله بیشینه و لثاژ بزرگتری نسبت به حالت عدم وجود آهنربا داشت.

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادها

در این فصل، ابتدا بر پژوهش انجام شده مروری خواهد شد و سپس بخشی از دستاوردهای آن بیان می‌شوند. در انتهای فصل، پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آینده معرفی می‌شوند.

۱-۶ مروری بر پژوهش انجام شده و نتایج آن

یکی از مشکلات سیستم‌های برداشت انرژی که رفتار خطی دارند، کوچک بودن پهنای باند برداشت انرژی است. برای رفع این مشکل، می‌توان اثرات غیرخطی و تشدید داخلی را به سیستم اضافه نمود که باعث وسیع‌تر شدن پهنای باند می‌گردند. در فصل ۱، بر پژوهش‌های انجام شده در زمینه برداشت انرژی و وسیع‌تر کردن پهنای باند، مروری انجام شد.

در این پژوهش، سیستم تیر دوگانه گیردار نمایش داده شده در شکل ۱-۲، برای برداشت انرژی پیشنهاد گردید. سیستم پیشنهادی از یک تیر دوگانه گیردار تشکیل شده که در انتهای خود به وسیله یک فنر به یکدیگر متصل می‌شوند. وصله‌های پیزوالکتریک برای برداشت انرژی به صورت متقارن بر روی سطوح بالا و پایین تیر بالا نصب شده و به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند. در انتهای تیرهای بالا و پایین، جرم‌هایی برای تنظیم کردن فرکانس‌های طبیعی سیستم، نصب شده که جرم نصب شده بر تیر پایین، آهنربا است. سیستم در این حالت رفتار خطی از خود نشان می‌دهد.

برای طراحی سیستم بر مبنای تشدید داخلی، آهنربای دیگری روبه‌روی آهنربای اول بر پایه سیستم نصب شده که نیروی مغناطیسی ایجاد شده بین دو آهنربا، سبب غیرخطی شدن سیستم می‌شود. در این حالت، پارامترهای سیستم به گونه‌ای طراحی گردیده که فرکانس طبیعی دوم نزدیک دو برابر فرکانس طبیعی اول باشد و در نتیجه، تشدید داخلی بتواند در سیستم رخ دهد.

در فصل ۲، معادلات حرکت سیستم بر مبنای روش انرژی به وسیله روش گسسته‌سازی مودهای فرضی استخراج گردید. در استخراج معادلات حرکت، اثر لایه چسب استفاده شده در میان سطوح تیر بالا و وصله‌های پیزوالکتریک، به دلیل اهمیت آن در انتقال کرنش محوری، در نظر گرفته شد. برای حل معادلات حرکت سیستم، از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده شد که در فصل ۳ ارائه گردید. ابتدا بر مبنای پژوهش‌های انجام گرفته، از راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱ استفاده شد. در ادامه، مقیاس‌گذاری جدیدی برای راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه تحت عنوان "راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲"، در این پژوهش ارائه گردید.

در فصل ۴، وسیله آزمایشگاهی ساخته شده برای صحت‌سنجی نتایج نظری، معرفی گردید و نحوه انجام آزمایش شرح داده شد. آزمایش تجربی در این پژوهش در دو حالت عدم وجود آهنربا و وجود آهنربا انجام شده است. در حالت عدم وجود آهنربا، آهنربای دوم که بر پایه سیستم نصب شده، حذف می‌گردد و سیستم رفتار خطی از خود نشان می‌دهد. در حالت وجود آهنربا، آهنربای دوم در فاصله مشخصی از آهنربای اول قرار داده شده و اثر نیروی غیرخطی آن بر برداشت انرژی بررسی می‌گردد.

در فصل ۵، نتایج نظری و تجربی حاصل از این پژوهش، ارائه گردید. ابتدا با مدل‌سازی تیر دوگانه گیردار در نرم‌افزار آباکوس، از شکل مودهای به دست آمده از آن به عنوان مود فرضی استفاده کرده و به وسیله آن‌ها تمامی پارامترهای معادلات حرکت، همانند ماتریس‌های جرم، سختی، میرایی و غیره مشخص شدند. در ادامه نتایج تجربی در دو حالت عدم وجود و وجود آهنربا در مقادیر مختلفی از شتاب پایه، مقاومت الکتریکی و فاصله اولیه میان دو آهنربا، ارائه گردید. مقایسه میان نتایج تجربی و نظری نشان داد که مدل‌سازی ریاضی انجام شده در هر دو حالت عدم وجود و وجود آهنربا، دقت بالایی در برابر نتایج تجربی دارد و به خوبی می‌تواند رفتار آن‌ها را پیش‌بینی کند. در ادامه بین راه‌حل‌های مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری‌های ۱ و ۲ و راه‌حل عددی مدل غیرخطی مقیاس‌های انجام شد و مشخص گردید که راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ دارای دقت بالاتر در محاسبه قله‌ها و فرکانس‌های متناظر آن در پاسخ فرکانسی نسبت به راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۱، در برابر حل عددی است. بنابراین می‌توان به جای استفاده از حل عددی از راه‌حل تحلیلی تقریبی مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲ استفاده کرد که دارای دقت بالا و سرعت محاسبه بسیار زیاد نسبت به راه‌حل عددی است. در انتهای فصل ۵، با استفاده از نتایج نظری به دست آمده از راه‌حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس‌گذاری ۲،

تغییرات پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ در حالت وجود آهنربا نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، بررسی گردید. نتایج این قسمت نشان دادند که افزودن آهنربای دوم به سیستم (حالت وجود آهنربا)، سبب تغییر پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ نسبت به حالت عدم وجود آهنربا می‌شود. معمولاً رفتار تغییرات پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ در حالت وجود آهنربا عکس یکدیگر است، یعنی با کاهش یکی، دیگری افزایش می‌یابد و برعکس (البته ممکن است که هر دو همزمان کاهش یا افزایش نیز یابند). بنابراین با توجه به هدف برداشت انرژی، با بهینه‌سازی پارامترهای سیستم، می‌توان پهنای باند یا قله بیشینه ولتاژ، یا هر دو را در حالت وجود آهنربا نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، بهبود داد. بخشی از نتایج به دست آمده از این قسمت به طور خلاصه عبارت است از:

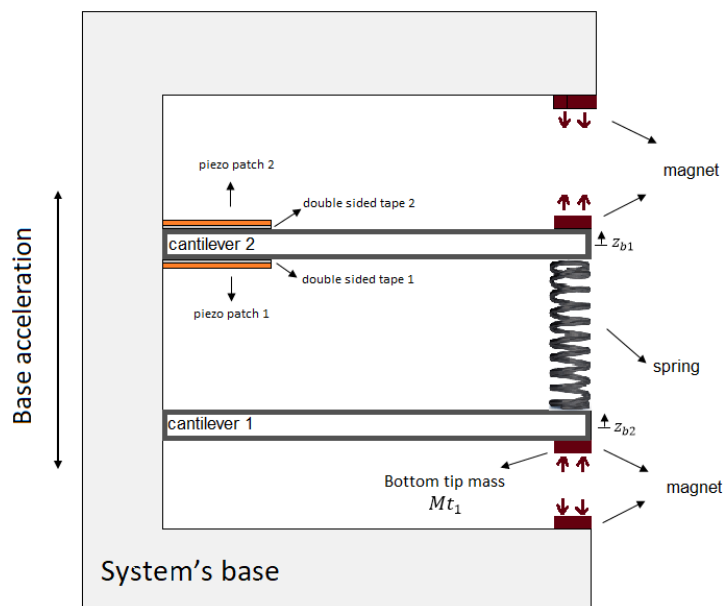
۱. پهنای باند در حالت عدم وجود آهنربا نسبت به شتاب پایه ثابت مانده، در حالی که نسبت به مقاومت الکتریکی به میزان کمی تغییر می‌کند.
۲. پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ یا توان در حالت وجود آهنربا، در هر شرایطی از شتاب پایه، مقاومت الکتریکی و فاصله اولیه آهنربا، نسبت به حالت عدم وجود آهنربا تغییر می‌کنند.
۳. توان الکتریکی بهینه در هر دو حالت وجود و عدم وجود آهنربا، در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم، برداشت می‌شود.
۴. برداشت انرژی در فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا، در هر مقداری از شتاب پایه و مقاومت الکتریکی، دارای وسیع‌ترین پهنای باند نسبت به سایر فواصل آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا است، اگر چه که مقدار قله بیشینه ولتاژ یا توان آن کمترین مقدار را دارد. بنابراین فاصله اولیه ۲/۶۷ سانتی‌متر بهترین انتخاب برای افزایش پهنای باند برداشت انرژی است. به عنوان مثال، در حالت مدار باز و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه، پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، به ترتیب به مقدار ۵۱/۲۲٪ و ۲۰/۸۲٪، افزایش و کاهش می‌یابند. اگر از مقاومت ۱۷/۹۷ کیلو اهم، به جای حالت مدار باز استفاده گردد، پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ به ترتیب به میزان ۳۶/۵۹٪ و ۱/۶٪ افزایش می‌یابند که نشان می‌دهد مقدار مقاومت الکتریکی می‌تواند قله بیشینه ولتاژ در حالت وجود آهنربا را نسبت به حالت عدم وجود آهنربا در شرایط یکسان، بزرگتر یا کوچکتر نماید.
۵. فاصله اولیه ۱/۹۷ سانتی‌متر میان دو آهنربا، در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه و مقاومت الکتریکی کوچکتر از ۴۰۰ کیلو اهم، بزرگترین قله بیشینه ولتاژ یا توان را نسبت به سایر فواصل آهنربا و حالت عدم وجود آهنربا دارد. مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم که توان بهینه را به دست می‌دهد، نیز در این بازه مقاومت الکتریکی قرار گرفته است. اگر از مقاومت الکتریکی ۱۷/۹۷ کیلو اهم و شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه استفاده گردد، پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ نسبت به حالت عدم وجود آهنربا به ترتیب به مقدار ۴/۸۸٪ و ۱۶/۴٪ کاهش و افزایش می‌یابند.
۶. فاصله اولیه ۲/۵۵ سانتی‌متر، بهینه‌ترین فاصله اولیه در میان سایر فواصل آهنربا در مقاومت الکتریکی ۲۶۹ کیلو اهم

است، به دلیل این که توان بهینه را در پهنای باند وسیع تر با کاهش کمتری از قله بیشینه ولتاژ یا توان نسبت به حالت عدم وجود آهنربا، به دست می‌دهد. مثلاً در شتاب پایه ۱ متر بر مجذور ثانیه، پهنای باند و قله بیشینه ولتاژ نسبت به حالت عدم وجود آهنربا به ترتیب به مقدار $۳۸/۱\%$ و $۵/۶۴\%$ افزایش و کاهش می‌یابند.

۲-۶ پیشنهادها

در این پژوهش با اضافه کردن آهنربای دوم به سیستم برداشت انرژی و طراحی آن بر مبنای تشدید داخلی، بسته به هدف مورد نظر، در حالت وجود آهنربا پهنای باند یا قله بیشینه ولتاژ یا هر دو، نسبت به حالت عدم وجود آهنربا افزایش پیدا کردند. در ادامه این پژوهش موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

۱. استفاده از مقیاس گذاری انجام شده در راه حل مقیاس‌های زمانی چندگانه بر اساس مقیاس گذاری ۲ در سایر پژوهش‌های انجام شده همانند مرجع [۳۶] و بررسی دقت آن در برابر راه حل انجام شده در آن پژوهش.
۲. استفاده از پدیده تشدید داخلی در کنترل ارتعاشات برای کم کردن دامنه ارتعاش.
۳. مقایسه سطح زیر نمودار ولتاژ یا توان الکتریکی تولیدی بر حسب فرکانس تحریک در محدوده پهنای باند در فواصل اولیه مختلف آهنربا.
۴. استفاده از آهنربا برای تیر بالا با توجه به شکل ۶-۱ و بررسی اثر دو پایداره شدن سیستم به همراه تشدید داخلی در برداشت انرژی.



شکل ۶-۱ - سیستم پیشنهادی برای بررسی اثر پدیده دو پایداره و تشدید داخلی در برداشت انرژی.

پیوست‌ها

پ-۱ روابط محاسبه بعضی از پارامترهای استفاده شده در فصل‌های قبل

در این بخش، روابط محاسبه برخی از پارامترهای به کار رفته در فصل‌های قبل، ارائه می‌شوند. روابط محاسبه بعضی از پارامترهای ذکر شده در رابطه (۸-۲)، در رابطه (پ-۱) داده شده که در آن نمادهای $I_{subscript}$ ، $E_{subscript}$ ، Z_{Na} و b_p ، h_p ، $b_{subscript}$ ، $h_{subscript}$ به ترتیب نمایانگر مدول الاستیک، ممان دوم سطح^۱، ضخامت و عرض هریک از زیر لایه‌های وصله پیزوالکتریک بالا، ضخامت و عرض کل وصله پیزوالکتریک بالا و فاصله میان بالاترین سطح و موقعیت تار خنثی وصله پیزوالکتریک بالا هستند.

$$D_p = EI \Big)_{Polyimide} + EI \Big)_{Stainless\ steel\ 304} + EI \Big)_{PZT-5J} + EI \Big)_{Copper} + EI \Big)_{Polyester}$$

$$I_{Polyimide} = \frac{b_{Polyimide}}{3} \left((Z_{Na} - h_p + h_{Polyimide})^3 - (Z_{Na} - h_p)^3 \right)$$

^۱Second moment of area

$$I_{Stainless\ steel\ 304} = \frac{b_{Stainless\ steel\ 304}}{3} \left(\left(Z_{Na} - h_p + h_{Polyimide} + h_{Stainless\ steel\ 304} \right)^3 - \left(Z_{Na} - h_p + h_{Polyimide} \right)^3 \right)$$

$$I_{PZT-5J} = \frac{b_{PZT-5J}}{3} \left(\left(Z_{Na} - h_{Copper} - h_{Polyester} \right)^3 - \left(Z_{Na} - h_{PZT-5J} - h_{Copper} - h_{Polyester} \right)^3 \right)$$

$$I_{Copper} = \frac{b_{Copper}}{3} \left(\left(Z_{Na} - h_{Polyester} \right)^3 - \left(Z_{Na} - h_{Polyester} - h_{Copper} \right)^3 \right)$$

$$I_{Polyester} = \frac{b_{Polyester}}{3} \left(\left(Z_{Na} \right)^3 - \left(Z_{Na} - h_{Polyester} \right)^3 \right)$$

$$B_{series} = \frac{\bar{e}_{31} b_p}{2 h_{PZT-5J}} \left(\left(Z_{Na} - h_{Copper} - h_{Polyester} \right)^2 - \left(Z_{Na} - h_{PZT-5J} - h_{Copper} - h_{Polyester} \right)^2 \right)$$

$$B_{parallel} = 2B_{series} \quad (پ-۱)$$

جرم واحد طول وصله پیزوالکتریک بالا (یا پایین) که در رابطه (۲-۱۰) استفاده شده، در رابطه (پ-۲) ارائه شده است.

$$m_p = \rho A \left(\begin{array}{l} Polyimide \\ Stainless\ steel\ 304 \\ PZT-5J \\ Copper \\ Polyester \end{array} \right) \quad (پ-۲)$$

که در آن نمادهای $\rho_{subscript}$ و $A_{subscript}$ به ترتیب به چگالی و سطح مقطع عرضی هریک از لایه‌های وصله پیزوالکتریک بالا (یا پایین) اشاره دارند.

پارامتر c_p که در رابطه (۲-۱۶) استفاده شده، در رابطه (پ-۳) تعریف شده است.

$$c_{p_{series}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S L_p b_p}{2h_p} \quad (\text{پ-۳})$$

$$c_{p_{parallel}} = 4c_{p_{series}}$$

پارامترهایی که در روابط (الف-۲) تا (ب-۲۸) استفاده شده‌اند، در رابطه (پ-۴) تعریف شده که در آن h_2 بیان‌گر ضخامت تیر بالا است.

$$M_1 = \int_0^L m_1 W_1^2(x) dx + M_{t1} W_1^2(x_{CG1}) + \frac{M_s}{3} W_1^2(x_{cs1})$$

$$M_2 = \int_0^L m_2 W_2^2(x) dx + \int_0^{L_p} 2m_p W_{p2}^2(x) dx + M_{t2} W_2^2(x_{CG2}) + \frac{M_s}{3} W_2^2(x_{cs2})$$

$$M_c = \frac{M_s}{6} W_1(x_{cs1}) W_2(x_{cs2})$$

$$K_1 = \int_0^L D_1 \left(\frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx + k W_1^2(x_{cs1})$$

$$K_2 = \int_0^L D_2 \left(\frac{d^2 W_2(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^{L_p} 2D_p \left(\frac{d^2 W_{p2}(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^{L_p} \left(\frac{2G_s b_s}{t_s} \right) \left(-\frac{h_2}{2} \frac{dW_2(x)}{dx} + (Z_{Na} - h_p) \frac{dW_{p2}(x)}{dx} \right)^2 dx + k W_2^2(x_{cs2})$$

$$K_c = -k W_1(x_{cs1}) W_2(x_{cs2})$$

$$v_c = \int_0^{L_p} B \frac{d^2 W_{p2}(x)}{dx^2} dx$$

$$F_{c1} = -\int_0^L m_1 W_1(x) dx - M_{t1} W_1(x_{CG1}) - \frac{1}{2} M_s W_1(x_{cs1})$$

$$F_{c2} = - \int_0^L m_2 W_2(x) dx - \int_0^{L_p} 2m_p W_{p2}(x) dx - M_{t2} W_2(x_{CG2}) - \frac{1}{2} M_s W_2(x_{cs2})$$

$$f_1 = F_{c1} \frac{d^2 \omega_b(t)}{dt^2}$$

$$f_2 = F_{c2} \frac{d^2 \omega_b(t)}{dt^2}$$

$$F_{1g} = \int_0^L m_1 g W_1(x) dx + M_{t1} g W_1(x_{CG1}) + \frac{1}{2} M_s g W_1(x_{cs1})$$

$$F_{2g} = \int_0^L m_2 g W_2(x) dx + \int_0^{L_p} 2m_p g W_{p2}(x) dx + M_{t2} g W_2(x_{CG2}) + \frac{1}{2} M_s g W_2(x_{cs2})$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_c \\ C_c & C_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} M_1 & M_c \\ M_c & M_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} K_1 & K_c \\ K_c & K_2 \end{pmatrix} \quad (\text{پ-۴})$$

در روابط (پ-۵الف)-(پ-۵ه)، پارامترهای به کار رفته در رابطه (۳-۶) تعریف می‌شوند. روابط (پ-۵الف) و (پ-۵ب) به ترتیب نشان‌دهنده ضرایب غیرخطی مرتبه دوم و سوم هستند.

$$q_1 = p_2 v_{m1}^3$$

$$q_2 = 2p_2 v_{m1}^2 v_2$$

$$q_3 = p_2 v_{m1} v_{m2}^2$$

$$q_8 = p_2 v_{m1}^2 v_{m2}$$

$$q_9 = 2p_2 v_{m1} v_{m2}^2$$

$$q_{10} = p_2 v_{m2}^3$$

(پ-۵الف)

$$q_4 = p_3 v_{m1}^4$$

$$q_5 = 3p_3 v_{m1}^3 v_{m2}$$

$$q_6 = 3p_3 v_{m1}^2 v_{m2}^2$$

$$q_7 = p_3 v_{m1} v_{m2}^3$$

(پ-۵)

$$q_{11} = p_3 v_{m1}^3 v_{m2}$$

$$q_{12} = 3p_3 v_{m1}^2 v_{m2}^2$$

$$q_{13} = 3p_3 v_{m1} v_{m2}^3$$

$$q_{14} = p_3 v_{m2}^4$$

$$\alpha_1 = \alpha + \beta \omega_1^2$$

(پ-۵ج)

$$\alpha_2 = \alpha + \beta \omega_2^2$$

$$\tilde{\theta}_1 = v_{m3} v_c$$

$$\tilde{\theta}_2 = v_{m4} v_c$$

(پ-۵د)

$$\tilde{\theta}_3 = -v_{m3} v_c$$

$$\tilde{\theta}_4 = -v_{m4} v_c$$

$$\tilde{f}_1 = \left(v_{m1} F_{c1} + v_{m3} F_{c2} \right) \frac{d^2 \omega_b(t)}{dt^2}$$

(پ-۵ه)

$$\tilde{f}_2 = \left(v_{m2} F_{c1} + v_{m4} F_{c2} \right) \frac{d^2 \omega_b(t)}{dt^2}$$

با در نظر گرفتن شتاب پایه به صورت تحریک هارمونیک (رابطه پ-۶)، رابطه (پ-۵ه) به رابطه (پ-۷) تبدیل می‌شود. در رابطه (پ-۶)، نمادهای X_b و Ω بیان‌گر دامنه جابه‌جایی تحریک پایه و فرکانس تحریک هستند.

$$w_b(t) = X_b \sin(\Omega t)$$

(پ-۶)

$$\tilde{f}_1 = F_1 \sin(\Omega t)$$

$$\tilde{f}_2 = F_2 \sin(\Omega t)$$

$$F_1 = (v_{m1}F_{c1} + v_{m3}F_{c2}) (-A_b) \quad (\text{پ-۷})$$

$$F_2 = (v_{m2}F_{c1} + v_{m4}F_{c2}) (-A_b)$$

$$A_b = X_b \Omega^2$$

در رابطه (پ-۷)، A_b به شتاب پایه اشاره دارد.

پ-۲ مشخصات وصله پیزوالکتریک و چسب دو طرفه

در جدول‌های پ-۱ و پ-۲، به ترتیب مشخصات لایه چسب دو طرفه و وصله پیزوالکتریک ارائه شده است.

جدول پ-۱ - مشخصات لایه چسب دو طرفه.

پارامتر	مقدار
طول لایه چسب دو طرفه (L_g)	۳۹ میلی‌متر
عرض لایه چسب دو طرفه	۲۰ میلی‌متر
ضخامت لایه چسب دو طرفه (t_g)	۰/۱۵ میلی‌متر
مدول الاستیک چسب دو طرفه [۳۷]	۰/۰۰۰۴۵ گیگاپاسکال
نسبت پواسون چسب دو طرفه [۳۷]	۰/۴۹

جدول پ-۲ - مشخصات زیر لایه‌های مختلف وصله پیزوالکتریک [۲۹] و [۱۲].

پارامتر	مقدار
طول کل وصله پیزوالکتریک (L_p)	۳۹ میلی‌متر
ضخامت کل وصله پیزوالکتریک (h_p)	۰/۴۱ میلی‌متر
عرض کل وصله پیزوالکتریک (b_p)	۲۳/۳ میلی‌متر
ضخامت لایه پلی‌آمید	۰/۰۳ میلی‌متر
چگالی پلی‌آمید	۱۴۱۰ کیلوگرم بر متر مکعب
مدول الاستیک پلی‌آمید	۴/۱ گیگاپاسکال
عرض لایه پلی‌آمید	۲۳/۳ میلی‌متر
ضخامت لایه فولاد ضد زنگ	۰/۱۵ میلی‌متر
چگالی فولاد ضد زنگ	۸۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب
مدول الاستیک فولاد ضد زنگ	۱۹۳ گیگاپاسکال
عرض لایه فولاد ضد زنگ	۲۳/۳ میلی‌متر
ضخامت لایه مس	۰/۰۳ میلی‌متر
چگالی مس	۸۹۳۰ کیلوگرم بر متر مکعب
مدول الاستیک مس	۱۱۰ گیگاپاسکال
عرض لایه مس	۲۳/۳ میلی‌متر
ضخامت لایه پلی‌استر	۰/۰۵ میلی‌متر
چگالی پلی‌استر	۱۳۸۰ کیلوگرم بر متر مکعب
مدول الاستیک پلی‌استر	۳/۶۵ گیگاپاسکال
عرض لایه پلی‌استر	۲۳/۳ میلی‌متر
ضخامت لایه PZT-5J	۰/۱۵ میلی‌متر
چگالی PZT-5J	۸۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب
مدول الاستیک PZT-5J در میدان الکتریکی ثابت (\bar{c}_{11}^E)	۶۳/۳ گیگاپاسکال
عرض لایه PZT-5J	۲۰/۸ میلی‌متر
ثابت تنش موثر لایه PZT-5J (\bar{e}_{31})	۱۷/۱- کولن بر متر مربع
ثابت گذردهی PZT-5J در کرنش ثابت ($\bar{\epsilon}_{33}^S$)	۱۸/۸ نانوفاراد بر متر

مراجع

- [1] <https://www.enerjigazetesi.ist/yenilenebilir-enerji-kapasitesi-2015te-yuzde-8-3-artti>, accessed 1 August 2020.
- [2] <https://www.alamy.com/stock-photo-coloful-background-geothermal-energy-production-plant-with-forest-142383390.html>, accessed 1 August 2020.
- [3] <https://www.piceramic.com/en/products/piezoceramic-actuators/patch-transducers/p-876-duraact-patch-transducer-101790>, accessed 1 August 2020.
- [4] Du Toit, N. E., *Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester*, Massachusetts Institute of Technology, Ph.D. thesis, 2005.
- [5] Priya, S., Song, H.-C., Zhou, Y., Varghese, R., Chopra, A., Kim, S.-G., Kanno, I., Wu, L., Ha, D. S., Ryu, J., *et al.*, “A review on piezoelectric energy harvesting: materials, methods, and circuits”, *Energy Harvesting and Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 3–39, 2019.
- [6] Yang, Z., Zhou, S., Zu, J., and Inman, D., “High-performance piezoelectric energy harvesters and their applications”, *Joule*, Vol. 2, No. 4, pp. 642–697, 2018.
- [7] <https://www.pcb.com/resources/technical-information/introduction-to-accelerometers>, accessed 1 August 2020.
- [8] <https://www.directindustry.com/prod/dsm/product-16752-91527.html>, accessed 1 August 2020.
- [9] Jiang, S., Li, X., Guo, S., Hu, Y., Yang, J., and Jiang, Q., “Performance of a piezoelectric bimorph for scavenging vibration energy”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 14, No. 4, p. 769, 2005.
- [10] Dhote, S., Yang, Z., Behdinan, K., and Zu, J., “Enhanced broadband multi-mode compliant orthoplanar spring piezoelectric vibration energy harvester using magnetic force”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 135, pp. 63–71, 2018.
- [11] Pan, D. and Dai, F., “Design and analysis of a broadband vibratory energy harvester using bi-stable piezoelectric composite laminate”, *Energy Conversion and Management*, Vol. 169, pp. 149–160, 2018.
- [12] Erturk, A. and Inman, D. J., *Piezoelectric energy harvesting*, John Wiley & Sons, 2011.
- [13] Zhang, G.-C., Chen, L.-Q., and Ding, H., “Forced vibration of tip-massed cantilever with nonlinear magnetic interactions”, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, No. 02, p. 1450015, 2014.
- [14] Zhu, P., Ren, X., Qin, W., Yang, Y., and Zhou, Z., “Theoretical and experimental studies on the characteristics of a tri-stable piezoelectric harvester”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 87, No. 9, pp. 1541–1554, 2017.

- [15] Wu, Y., Ji, H., Qiu, J., Liu, W., and Zhao, J., “An internal resonance based frequency up-converting energy harvester”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, No. 13, pp. 2766–2781, 2018.
- [16] Zhu, J., Wang, A., Hu, H., and Zhu, H., “Hybrid electromagnetic and triboelectric nanogenerators with multi-impact for wideband frequency energy harvesting”, *Energies*, Vol. 10, No. 12, p. 2024, 2017.
- [17] Halim, M. A. and Park, J. Y., “Piezoelectric energy harvester using impact-driven flexible side-walls for human-limb motion”, *Microsystem Technologies*, Vol. 24, No. 5, pp. 2099–2107, 2018.
- [18] Zhao, D., Liu, S., Xu, Q., Sun, W., Wang, T., and Cheng, Q., “Theoretical modeling and analysis of a 2-degree-of-freedom hybrid piezoelectric–electromagnetic vibration energy harvester with a driven beam”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, No. 11, pp. 2465–2476, 2018.
- [19] Froude, W., “Remarks on mr. scott russell’s paper on rolling”, *Transactions of the Institute of Naval Research*, Vol. 4, pp. 232–275, 1863.
- [20] Nayfeh, A. H., Mook, D. T., and Marshall, L. R., “Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions”, *Journal of Hydronautics*, Vol. 7, No. 4, pp. 145–152, 1973.
- [21] Chen, L.-Q. and Jiang, W.-A., “Internal resonance energy harvesting”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 82, No. 3, p. 031004, 2015.
- [22] Xu, J. and Tang, J., “Multi-directional energy harvesting by piezoelectric cantilever-pendulum with internal resonance”, *Applied Physics Letters*, Vol. 107, No. 21, p. 213902, 2015.
- [23] Xiong, L., Tang, L., and Mace, B. R., “Internal resonance with commensurability induced by an auxiliary oscillator for broadband energy harvesting”, *Applied Physics Letters*, Vol. 108, No. 20, p. 203901, 2016.
- [24] Ramezanpour, R., Nahvi, H., and Ziaei-Rad, S., “Increasing the performance of a rotary piezoelectric frequency up-converting energy harvester under weak excitations”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 139, p. 011016, Dec. 2016.
- [25] Yang, W. and Towfighian, S., “A hybrid nonlinear vibration energy harvester”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 90, pp. 317–333, 2017.
- [26] Fu, H. and Yeatman, E. M., “Rotational energy harvesting using bi-stability and frequency up-conversion for low-power sensing applications: Theoretical modelling and experimental validation”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 125, pp. 229–244, 2019.
- [27] Chen, L.-Q., Zhang, G.-C., and Ding, H., “Internal resonance in forced vibration of coupled cantilevers subjected to magnetic interaction”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 354, pp. 196–218, 2015.
- [28] Zhang, G.-C., Chen, L.-Q., Li, C.-P., and Ding, H., “Primary resonance of coupled cantilevers subjected to magnetic interaction”, *Meccanica*, Vol. 52, No. 4-5, pp. 807–823, 2017.

- [29] <https://piezo.com/collections/piezoelectric-sensors/products/piezoelectric-bending-transducer-s118-j1ss-1808yb>, accessed 1 August 2020.
- [30] Rao, S. S., *Vibration of continuous systems*, Vol. 464, Wiley Online Library, 2007.
- [31] Clough, R. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, Civil Engineering Series, McGraw-Hill, 1993.
- [32] Nayfeh, A. H., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley & Sons, 2011.
- [33] Strogatz, S. H., *Nonlinear dynamics and chaos*, 1996.
- [34] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [35] Yang, W. and Towfighian, S., “Internal resonance and low frequency vibration energy harvesting”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 26, No. 9, p. 095008, 2017.
- [36] Yang, W. and Towfighian, S., “A parametric resonator with low threshold excitation for vibration energy harvesting”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 446, pp. 129–143, 2019.
- [37] <https://www.muirtapes.com/image/pdf/3M%20VHB%20ATT%20TDS.pdf>, accessed 1 August 2020.
- [38] Chopra, I. and Sirohi, J., *Smart structures theory*, Vol. 35, Cambridge University Press, 2013.

Energy harvesting from a double cantilever beam with internal resonance

Reza Eshtehardiha

r.eshtehardiha@me.iut.ac.ir

Data of Submission: September 6, 2020

Department of Mechanical Engineering

Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Degree: M.Sc.

Language: Farsi

Supervisor: Reza Tikani, r_tikani@cc.iut.ac.ir.

Abstract

Conventional harvester systems usually have linear behavior. One of the great matters in these systems is that energy is harvested in a low frequency bandwidth. In this study, double cantilever beams are used for energy harvesting. Two beams are connected at the end of them through a linear spring. The bimorph piezoelectric patches are attached to the top beam using double-sided tape for energy harvesting. A pair of the magnet is applied for adding a nonlinear effect to the system. One of the magnets is mounted at the end of the bottom beam, and another is on the system's base. The whole system is designed based on the internal resonance phenomenon. Base excitation of the acceleration type is used for exciting system. The governing equations of the system's vibration are derived using the energy method by the Euler-Bernoulli assumptions. Next, the system is discretized by the assumed modes approach. Two cases are investigated, including the absence and the presence of the magnetic force. In the absence of the magnetic force, the magnet mounted on the system's base is removed, and thus the system shows a linear behavior. In the presence of the magnetic force, the nonlinearity and internal resonance effects on the energy harvesting are investigated. The obtained equations of motion are solved with numerical and method of multiple scales (MMS) solutions. For the first time in this study, MMS is derived based on new scaling for a two-degrees-of-freedom system with quadratic and cubic nonlinear terms. MMS solution based on our proposed scaling is more accurate than the MMS solution based on conventional scaling that others have used. It predicts the frequency response peaks and their corresponding frequencies more precisely compared to the numerical solution. A test rig was designed and fabricated for experimental studies. The experimental results show that the performed modeling is in good agreement with the experimental data. The obtained results show that in the presence of the magnetic force, energy is usually harvested in a broader frequency bandwidth in comparison to the absence of magnetic force. However, its peak voltage can be higher or lower than the absence of the magnetic force. Depending on need, the system's parameters in the case of the presence of magnetic force can be selected in such a way that the bandwidth, or peak voltage, or both increase compared to the absence of magnetic force.

Keywords

energy harvesting, double cantilever beams, nonlinear vibration, internal resonance, assume mode, method of multiple scale



Isfahan University of Technology
Department of Mechanical Engineering

**Energy harvesting from a double cantilever beam
with internal resonance**

A Thesis
Submitted in partial fulfillment of the requirements
for the degree of M.Sc.

By
Reza Eshtehardiha

Evaluated and Approved by the Thesis Committee, on September 6, 2020

1- Reza Tikani, Assoc. Prof. (Supervisor)

2- Saeed Ziaei-Rad, Prof. (Advisor)

3- Hasan Nahvi, Prof. (Examiner)

4- Ali Loghmani, Assist. Prof. (Examiner)

Department Graduate Coordinator: Reza Tikani, Assoc. Prof.

RTikani
Saeed Z Rad

H. Nahvi

A. Loghmani

RTikani